

Trabajo Fin de Máster

Máster Universitario en Ingeniería Industrial

Simulación híbrida numérico-experimental de sistemas dinámicos

Autor: Álvaro Antonio Martínez Brugarolas

Tutor: José Ángel González Pérez

Dpto. Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2020



Trabajo Fin de Máster
Máster Universitario en Ingeniería Industrial

Simulación híbrida numérico-experimental de sistemas dinámicos

Autor:

Álvaro Antonio Martínez Brugarolas

Tutor:

José Ángel González Pérez

Profesor titular

Dpto. Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2020

Trabajo Fin de Máster: Simulación híbrida numérico-experimental
de sistemas dinámicos

Autor: Álvaro Antonio Martínez Brugarolas

Tutor: José Ángel González Pérez

El tribunal nombrado para juzgar el Trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2020

El Secretario del Tribunal

A mi familia

A mis maestros

Agradecimientos

A mi familia, y en especial a mis padres, por el apoyo y ánimo recibido. También por supuesto a mi tutor, José Ángel por guiarme durante el desarrollo de este trabajo.

Álvaro Antonio Martínez Brugarolas

Máster Universitario en Ingeniería Industrial

Sevilla, 2020

Las simulaciones híbridas son una forma de ensayar estructuras complejas sin tener que construirlas por completo, con el consiguiente ahorro de tiempo y dinero que esto conlleva. Para ello se combina la potencia de las simulaciones estructurales numéricas realizadas con ordenador, con la fiabilidad de los ensayos realizados sobre la propia estructura real, de modo que el grueso de la estructura será simulado computacionalmente (volúmenes finitos, elementos de contorno, ...) al mismo tiempo que se ensaya un modelo real de la parte más compleja de la estructura, dirigido por actuadores mecánicos, y se obtienen datos de este ensayo que se introducen en la simulación para acoplarlos.

El trabajo que a continuación se expone consta de dos partes bien diferenciadas. La primera de ellas es la fabricación de un sistema mecánico que permita ensayar una estructura simple, sobre la que poder aplicar desplazamientos y obtener las fuerzas requeridas para ello. Por tanto, será necesario emplear algún tipo de actuador que deforme la estructura y, por otro lado, un método de obtención de la fuerza aplicada, que permita registrar continuamente estos valores, para ser introducidos en el modelo numérico. La segunda parte del trabajo consiste en la implementación y depuración de los algoritmos de simulación y control pertinentes para la simulación híbrida, los cuales comprenderán tanto al modelo computacional de la parte numérica de nuestra estructura, como a los algoritmos y protocolos de comunicación entre los distintos dispositivos que integran el montaje.

Una vez completadas las dos partes se está en condiciones de realizar simulaciones con el prototipo construido para tal fin, y proceder al análisis de los resultados obtenidos, detectando posibles aspectos críticos y limitaciones en la simulación. Finalmente, se proponen mejoras al sistema construido, orientadas al perfeccionamiento tanto de los algoritmos y programas empleados como a la mejora de los dispositivos mecánicos utilizados, las cuales pueden ser incluidas en posibles trabajos futuros.

Abstract

Hybrid simulations are a way to test complex structures without having to build them completely, with the consequent saving of time and money that this entails. For this, the power of computer-based numerical structural simulations is combined with the reliability of the tests carried out on the actual structure itself, so that the bulk of the structure will be simulated computationally (finite elements, stiffness matrix, ...) at the same time that a real model of the most complex part of the structure is tested, led by mechanical actuators, and data is obtained from this test that is entered into the simulation to close the model.

The work that follows is made up of two distinct parts. The first of these is the manufacture of a mechanical system that allows a simple structure to be tested, on which deformations can be applied and the forces required can be obtained. Therefore, it will be necessary to use some type of actuator that deforms the structure and, on the other hand, a method of obtaining the applied force, which allows the continuous recording of these values, to be entered the numerical model. The second part is the implementation and debugging of the simulation and control algorithms pertinent to hybrid simulation, which will comprise both the computational model of the numerical part of our structure, as well as the communication algorithms and protocols between the different devices that make up the mounting.

Once the two parts are completed, we would be able to carry out simulations with the prototype built for this purpose, and proceed to the analysis of the results obtained, detecting possible critical aspects and limitations in the simulation. Finally, improvements to the built system will be proposed, aimed at perfecting both the algorithms and programs used and enhancing the mechanical devices used, which may be included in possible future papers.

Agradecimientos	ix
Resumen	xi
Abstract	xiii
Índice	i
Índice de Tablas	iii
Índice de Figuras	iv
Notación	vii
1 Introducción a la Simulación Híbrida	10
1.1 <i>Introducción</i>	10
1.2 <i>Objetivos del trabajo</i>	11
1.3 <i>Organización del documento</i>	11
2 Principios Teóricos	13
2.1 <i>Introducción</i>	13
2.2 <i>Solución analítica de sistema amortiguado en vibración libre</i>	13
2.3 <i>Solución analítica de sistema amortiguado en vibración forzada</i>	15
2.4 <i>Introducción a los métodos de integración numérica</i>	16
2.4.1 <i>El método de Newmark</i>	16
2.4.2 <i>Solución numérica de un problema acoplado</i>	17
2.4.3 <i>Solución híbrida de un problema acoplado</i>	20
3 Descripción del Montaje	24
3.1 <i>Introducción y objetivos</i>	24
3.2 <i>Estructura y bancada</i>	24
3.3 <i>Selección del actuador</i>	25
3.4 <i>Medición de la fuerza aplicada</i>	28
3.5 <i>Unidad de control</i>	29
3.6 <i>Interconexión y alimentación del sistema</i>	30
4 Funcionamiento del Sistema	32
4.1 <i>Introducción</i>	32
4.2 <i>Diagramas de funcionamiento</i>	32
4.2.1 <i>Servo SG90</i>	32
4.2.2 <i>Medidor digital de intensidad ACS712</i>	33
4.2.3 <i>Unidad de control</i>	33
4.3 <i>Relación Par-Intensidad</i>	34
4.4 <i>Frecuencia máxima de funcionamiento del sistema</i>	36
4.5 <i>Amplitud máxima de funcionamiento del sistema</i>	37
4.6 <i>Fuerza de interacción máxima del sistema</i>	37

5	Identificación de los Parámetros Dinámicos del Modelo Experimental	39
5.1	<i>Introducción</i>	39
5.2	<i>Identificación de los parámetros dinámicos</i>	39
5.2.1	Identificación de la rigidez <i>Ke</i> del sistema experimental	40
5.2.2	Identificación de la masa <i>Me</i> del sistema experimental	40
5.2.3	Identificación del amortiguamiento <i>Ce</i> del sistema experimental	42
5.3	<i>Validación de las propiedades identificadas de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema experimental</i>	42
5.4	<i>Ejemplo de validación</i>	45
6	Resultados	49
6.1	<i>Introducción</i>	49
6.2	<i>Simulación híbrida de un sistema de un grado de libertad en vibración forzada</i>	49
6.3	<i>Aplicación a un caso real</i>	53
6.3.1	Simulación híbrida de problemas de <i>n</i> grados de libertad	53
6.3.2	Condiciones de simulación	54
6.3.3	Simulación híbrida ante una aceleración armónica	55
6.3.4	Simulación híbrida ante una aceleración decreciente	60
7	Conclusiones y Desarrollos Futuros	66
7.1	<i>Conclusiones</i>	66
7.1.1	Algoritmos de integración para simulación híbrida	66
7.1.2	Estudio de modelo no lineal	66
7.1.3	Incremento de la frecuencia máxima de simulación	66
7.1.4	Método de medición de la fuerza	67
7.2	<i>Desarrollos futuros</i>	68
	Referencias	69

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 4-1. Tiempos de procesamiento obtenidos entre distintas iteraciones para la obtención de un tiempo de procesamiento medio, necesario para la obtención del periodo de muestreo medio.	36
Tabla 5-1. Condiciones iniciales y parámetros de integración empleados en el problema de identificación.	39
Tabla 5-2. Propiedades dinámicas de la parte numérica utilizadas para la identificación de propiedades de la parte experimental.	39
Tabla 5-3. Parámetros utilizados en el método de decremento exponencial para la determinación de la masa experimental M_e a través de la identificación del amortiguamiento del sistema.	42
Tabla 5-4. Propiedades dinámicas de la parte experimental a validar.	42
Tabla 5-5. Condiciones iniciales y parámetros de integración empleados para la realización del ejemplo de validación de las propiedades dinámicas.	45
Tabla 5-6. Propiedades dinámicas del sistema numérico y experimental empleados en el problema de validación.	46
Tabla 6-1. Propiedades dinámicas de la parte numérica empleadas en la simulación híbrida de sistema de un grado de libertad en vibración forzada.	50
Tabla 6-2. Parámetros de integración empleados para la realización de la simulación híbrida sobre un sistema de dos grados de libertad.	54
Tabla 6-3. Propiedades dinámicas de las partes numéricas y experimental empleada en la simulación híbrida de un problema de dos grados de libertad.	55

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1-1. Simulación híbrida del amortiguamiento introducido por el movimiento de un fluido (sloshing) [4].	10
Figura 2-1. Modelo mecánico de un sistema amortiguado de un grado de libertad.	13
Figura 2-2. Desplazamientos de un sistema amortiguado en vibración libre.	14
Figura 2-3. Modelo mecánico de un sistema amortiguado de un grado de libertad con fuerza externa aplicada.	15
Figura 2-4. Problema analizado, objeto de aplicación del algoritmo de <i>Newmark</i> constituido por dos subsistemas amortiguados de un grado de libertad interconectados por un vínculo rígido denotado por λ .	18
Figura 2-5. Modelo numérico acoplado con el experimental mediante desplazamiento u y reacción λ .	20
Figura 2-6. Interacción entre subsistemas numérico-experimental en la simulación híbrida de un problema acoplado.	22
Figura 3-1. Estructura del montaje experimental, bancada de tablero aglomerado junto a elemento flector de metacrilato.	25
Figura 3-2. Actuador hidráulico, neumático y mecánico.	25
Figura 3-3. Actuador rotativo (servo) y actuador lineal.	26
Figura 3-4. Servo SG90. Características técnicas y dimensiones.	28
Figura 3-5. Sensor de corriente inductivo ACS712.	29
Figura 3-6. Arduino Uno: placa de desarrollo empleada en nuestro montaje para la medición de la fuerza aplicada y control del actuador mecánico.	30
Figura 3-7. Esquema de conexión de nuestro montaje, formado por unidad de control, servo y sensor de intensidad.	30
Figura 4-1. Diagrama simplificado del sistema de posicionamiento de un servo.	32
Figura 4-2. Diagrama de bloques: elementos periféricos de la unidad de control.	33
Figura 4-3. Diagrama de flujo del algoritmo ejecutado por la unidad de control e interacción con dispositivos externos.	34
Figura 4-4. Montaje para la medición de la fuerza.	35
Figura 4-5. Datos del experimento y obtención de la recta de ajuste.	35
Figura 4-6. Aproximación arco-cuerda empleada en nuestro montaje para aplicación de desplazamiento lineal del servo sobre el elemento flexible.	37
Figura 4-7. Equivalencia entre fuerza aplicada y distancia del punto de aplicación en el servo.	38

Figura 5-1. Respuesta del sistema numérico-experimental del que se desea obtener el amortiguamiento.	40
Figura 5-2. Desplazamiento en los modelos numérico e híbrido obtenido con las propiedades dinámicas identificadas previamente.	43
Figura 5-3. Velocidad en ambos modelos tras identificación de propiedades dinámicas del sistema experimental.	44
Figura 5-4. Aceleración en ambos modelos tras identificación de propiedades dinámicas del sistema experimental.	44
Figura 5-5. Multiplicador de Lagrange (modelo numérico) y fuerza de interacción (modelo experimental) en ambos modelos tras identificación de propiedades dinámicas del sistema experimental.	45
Figura 5-6. Solución del problema de validación. Comparación de los desplazamientos obtenidos mediante simulación numérica y simulación híbrida.	46
Figura 5-7. Velocidad en el problema de validación. Comparación de las velocidades obtenidas mediante simulación numérica y simulación híbrida.	47
Figura 5-8. Aceleración en el problema de validación. Comparación de las aceleraciones obtenidas mediante simulación numérica y simulación híbrida.	47
Figura 5-9. Multiplicador de Lagrange (simulación numérica) y fuerza de interacción (simulación híbrida) en ambos modelos en el problema de validación.	48
Figura 6-1. Representación esquemática del modelo simulado, diferenciado según la parte numérica y la parte experimental.	49
Figura 6-2. Solución de desplazamiento en la simulación numérica e híbrida de un sistema de un grado de libertad en vibración forzada.	50
Figura 6-3. Velocidad en la simulación numérica e híbrida de un sistema de un grado de libertad en vibración forzada.	51
Figura 6-4. Aceleración en la simulación numérica e híbrida de un sistema de un grado de libertad en vibración forzada.	51
Figura 6-5. Multiplicador de Lagrange (simulación numérica) y fuerza de interacción (simulación híbrida) en ambos modelos en la simulación numérica e híbrida de un sistema de un grado de libertad en vibración forzada.	52
Figura 6-6. Fuerza externa senoidal aplicada sobre la parte numérica en la simulación numérica e híbrida de un sistema de un grado de libertad en vibración forzada.	52
Figura 6-7. Representación esquemática del caso simulado de un problema amortiguado de 2 grados de libertad.	53
Figura 6-8. Ejemplo de caso práctico sobre el que se podría aplicar la simulación híbrida, en donde se aprecian las partes numéricas 1 y 2 así como la parte experimental denotada con la letra <i>e</i> .	53
Figura 6-9. Fuerzas externas sufridas por los subsistemas como consecuencia de la aceleración del terreno.	56
Figura 6-10. Resultado numérico e híbrido del desplazamiento del subsistema 1 en la simulación de una aceleración de duración ilimitada.	56

Figura 6-11. Resultado numérico e híbrido del desplazamiento del subsistema 2 en la simulación de una aceleración de duración ilimitada.	57
Figura 6-12. Resultado numérico e híbrido de la velocidad del subsistema 1 en la simulación de una aceleración de duración ilimitada.	57
Figura 6-13. Resultado numérico e híbrido de la velocidad del subsistema 2 en la simulación de una aceleración de duración ilimitada.	58
Figura 6-14. Resultado numérico e híbrido de la aceleración del subsistema 1 en la simulación de una aceleración de duración ilimitada.	58
Figura 6-15. Resultado numérico e híbrido de la aceleración del subsistema 2 en la simulación de una aceleración de duración ilimitada.	59
Figura 6-16. Multiplicador de Lagrange (simulación numérica) y fuerza de interacción (simulación híbrida) en ambos modelos en la simulación de una aceleración de duración ilimitada.	59
Figura 6-17. Fuerza externa exponencialmente decreciente aplicada sobre los subsistemas 1 y 2 como consecuencia del movimiento del terreno en el caso de simulación híbrida con aceleración decreciente.	61
Figura 6-18. Solución del desplazamiento para el subsistema 1 en el caso de simulación híbrida con aceleración decreciente.	61
Figura 6-19. Solución del desplazamiento para el subsistema 2 en el caso de simulación híbrida con aceleración decreciente.	62
Figura 6-20. Velocidad del subsistema 1 en el caso de simulación híbrida con aceleración decreciente.	62
Figura 6-21. Velocidad del subsistema 2 en el caso de simulación híbrida con aceleración decreciente.	63
Figura 6-22. Aceleración del subsistema 1 en el caso de simulación híbrida con aceleración decreciente.	63
Figura 6-23. Aceleración del subsistema 2 en el caso de simulación híbrida con aceleración decreciente.	64
Figura 6-24. Multiplicador de Lagrange (solución numérica) y fuerza de interacción entre sistema numérico y experimental (solución híbrida) para el caso de simulación híbrida con aceleración decreciente.	64
Figura 7-1. Célula de carga para fuerzas reducidas, empleando como tecnología de medición las galgas extensiométricas.	68

M	Matriz de masa
K	Matriz de rigidez
C	Matriz de amortiguamiento
u	Vector desplazamiento
v	Vector velocidad
a	Vector aceleración
r	Vector de fuerzas asociadas a la estructura
f	Vector de fuerzas externas aplicadas
γ	Parámetro de Newmark, aproximación de velocidad
β	Parámetro de Newmark, aproximación de aceleración
u_{n+1}	Desplazamiento en el instante $n+1$
\dot{u}_{n+1}	Derivada temporal de u en el instante $n+1$
\ddot{u}_{n+1}	Segunda derivada temporal de u en el instante $n+1$
Δt	Incremento de tiempo
λ_{n+1}	Multiplicador de Lagrange en el instante $n+1$

1 INTRODUCCIÓN A LA SIMULACIÓN HÍBRIDA

1.1 Introducción

La simulación híbrida es una técnica experimental para la simulación dinámica de estructuras en el dominio del tiempo, que consiste en acoplar un modelo físico con un modelo computacional. Una parte de la estructura es ensayada físicamente mientras que el resto de esta será simulada en el modelo numérico.

Las simulaciones híbridas permiten el ensayo de grandes estructuras y proporcionan resultados más precisos que los que se podrían obtener empleando un método numérico. Esto es debido principalmente al uso de fuerzas y desplazamientos reales aplicados sobre un modelo de la estructura real, en vez del empleo de resultados matemáticos obtenidos de un modelo numérico [1].

En una simulación híbrida, el sistema de control consiste en un bucle de realimentación el cual determina los desplazamientos o fuerzas que deben ser aplicados sobre el elemento estructural ensayado. De aquí se extrae que existen dos tipos principales de ensayos, con control en fuerza o control en desplazamiento. La elección de uno u otro dependerá normalmente de las propiedades de la estructura, ya que en caso de encontrarnos ante unas estructuras muy flexibles será adecuado un control en desplazamiento, mientras que el control en fuerza suele ser en cambio recomendable para estructuras de elevada rigidez [2]. En un sistema con alta flexibilidad los desplazamientos serán muy elevados mientras que el rango de fuerza aplicada será reducido, por lo que la variable a controlar en este caso sería el desplazamiento. Un razonamiento análogo puede hacerse en el caso de sistemas de elevada rigidez, en donde el desplazamiento será reducido mientras que el rango de fuerza aplicada será elevado, siendo recomendable emplear como variable de control la fuerza aplicada [3].

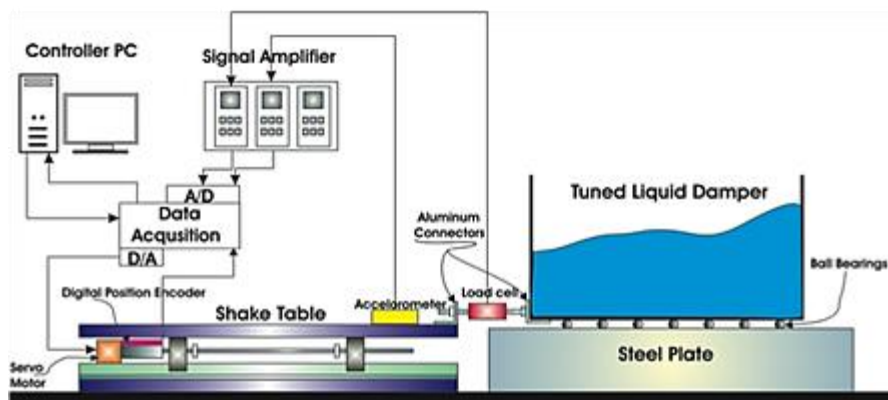


Figura 1-1. Simulación híbrida del amortiguamiento introducido por el movimiento de un fluido (sloshing) [4].

Un caso que se entiende especialmente bien es el representado en la Figura 1-1. Supongamos que tenemos en la cubierta de un edificio un gran depósito de agua y queremos evaluar el comportamiento de esta estructura frente a un sismo de una determinada magnitud. Una primera opción sería modelar numéricamente la estructura completa para obtener de este modo el comportamiento previsto, pero nuestro edificio tiene una singularidad, y es que contiene una gran masa de agua en su zona más elevada.

El principal problema que nos encontraríamos en esta situación es que, si bien los elementos estructurales comunes como vigas y cimientos podrían ser modelados con una cierta facilidad (esta dependerá finalmente de las propiedades de cada elemento) no ocurre lo mismo con el depósito de agua, en el cual se producirán una serie de ondas y desplazamientos de masa que dificultarán el modelado de las fuerzas que el fluido ejercerá sobre el resto de la estructura.

Es aquí donde entraría en juego la simulación híbrida ya que, mediante esta técnica, se puede ensayar experimentalmente este depósito al mismo tiempo que el resto de la estructura se modela de forma numérica, acoplando ambos sistemas mediante sus fuerzas y desplazamientos y obteniendo así un sistema de mayor exactitud.

Como se observa en la Figura 1-1, el montaje necesario en este caso sería en primer lugar el propio depósito, el cual contendría el líquido que se comportaría como un sistema no lineal de elevada complejidad, por otro lado tendríamos el actuador, que en este caso sería conveniente que fuese con control en desplazamiento, ya que como se ha dicho este es más adecuado para sistemas de reducida rigidez.

A continuación, deberemos unir el depósito y el actuador con un sensor que nos permita registrar la fuerza que se está transmitiendo en cada instante, en este caso se añadirá un sensor de carga. Todos estos datos, una vez amplificados, convertidos en digital, etc. se introducirán en el ordenador que ejecuta la simulación del resto de la estructura, obteniendo así una simulación con elevada exactitud del conjunto completo.

1.2 Objetivos del trabajo

Una vez introducida la simulación híbrida, podríamos dividir el objetivo de este trabajo en tres partes bien diferenciadas, pero dependientes entre ellas.

1. La primera de ellas, de carácter más teórico, será el estudio y aplicación de uno de los algoritmos de simulación híbrida más comunes, el algoritmo de *Newmark*, mediante su uso en una simulación sobre un elemento experimental a ensayar.
2. Evidentemente, si se desea realizar algún tipo de ensayo será necesario disponer tanto de un banco de ensayos como de un elemento sobre el que realizarlos. Precisamente esta será la segunda parte de este trabajo, la cual comprenderá la fabricación de un dispositivo que permita la aplicación de desplazamientos controlados sobre el elemento experimental (el cual tendrá un comportamiento flexible) y a su vez nos devuelva la fuerza requerida para ello, teniendo por tanto todo lo necesario para llevar a cabo una simulación híbrida completa.
3. Una vez fabricados los mecanismos de simulación y verificado el buen funcionamiento de los algoritmos empleados se realizarán varios experimentos sobre nuestro modelo experimental, analizando los resultados y proponiendo posibles mejoras.

1.3 Organización del documento

Este trabajo estará estructurado en siete capítulos:

El capítulo dos contiene el contenido teórico de este texto. En él se presentan tanto las soluciones analíticas de un sistema mecánico amortiguado como los algoritmos empleados en la simulación híbrida para este trabajo.

El capítulo tres explica los distintos pasos llevados a cabo para la construcción del banco de ensayos, los cuales van desde la construcción de la bancada hasta la interconexión de todos los elementos electrónicos que lo componen.

En el capítulo cuatro se detalla el funcionamiento lógico de los distintos dispositivos que componen nuestro montaje, así como las limitaciones físicas a las que está sometido.

En el capítulo cinco se obtienen los parámetros dinámicos del sistema experimental, para poder obtener numéricamente su respuesta, de cara a compararla con la obtenida mediante la simulación híbrida con el objetivo de validar los resultados.

En el capítulo seis se someterá a nuestro montaje a una serie de experimentos, con variaciones entre ellos, de cara a evaluar el desempeño de nuestro sistema y detectar posibles discrepancias entre el resultado híbrido y el numérico.

Finalmente, en el capítulo siete, se expondrán las conclusiones de este trabajo, así aspectos a mejorar en base a la experiencia adquirida.

2 PRINCIPIOS TEÓRICOS

2.1 Introducción

En los siguientes apartados se expondrán los diferentes conceptos teóricos necesarios para la implementación de la simulación híbrida. De cara a simplificar las expresiones y desarrollos matemáticos, estos algoritmos serán aplicados sobre modelos mecánicos de un solo grado de libertad con diferentes configuraciones, no obstante, la extensión de estas expresiones a sistemas de múltiples grados de libertad no supone mayor complejidad que la incrementar, según el número de grados de libertad añadidos, el tamaño de las matrices y vectores empleados en las simulaciones numéricas, siguiendo los mismos procedimientos que los empleados para el sistema de un único grado de libertad.

Antes de desarrollar los métodos numéricos empleados, se expondrán, como referencia, las soluciones teóricas de dos sistemas mecánicos amortiguados, uno vibrando libremente y el otro bajo la acción de una excitación externa.

2.2 Solución analítica de sistema amortiguado en vibración libre

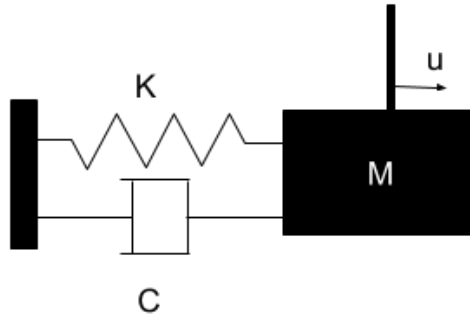


Figura 2-1. Modelo mecánico de un sistema amortiguado de un grado de libertad.

A continuación, se expone la solución analítica de un sistema elástico amortiguado de un grado de libertad como el mostrado en la Figura 2-1, mediante la aplicación de la 2ª Ley de *Newton* sobre este sistema, conocidas las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} M \ddot{u}(t) + C \dot{u}(t) + Ku(t) = 0, & t \geq 0 \\ u = u_0 \text{ en } t = 0 \\ \dot{u} = \dot{u}_0 \text{ en } t = 0 \end{cases} \quad (2-1)$$

siendo M la masa del sistema, C su factor de amortiguamiento y K la rigidez del muelle, la respuesta de este sistema a las condiciones iniciales obedecerá a la siguiente expresión:

$$u(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \left[u_0 \cos(\omega_d t) + \frac{\dot{u}_0 + \zeta \omega_n u_0}{\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n} \text{sen}(\omega_d t) \right] \quad (2-2)$$

donde u_0 representa la posición inicial del oscilador y \dot{u}_0 la velocidad inicial de este. El resto de los parámetros presentes en la ecuación diferencial (2-1), son:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (2-3)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{C}{M\omega_n}; \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (2-4)$$

siendo ω_n la frecuencia natural del sistema, ζ el amortiguamiento y ω_d la frecuencia del sistema amortiguado.

La velocidad y aceleración se obtendrán simplemente derivando respecto al tiempo la expresión (2-2). A modo de ejemplo se muestra el resultado analítico obtenido en un sistema con los siguientes parámetros: $M=1$ kg, $C=0.1$ N·s/m y $K=2.5$ N/m. Las condiciones iniciales han sido velocidad nula y desplazamiento 25 mm. El desplazamiento obtenido frente al tiempo se muestra en la Figura 2-2.

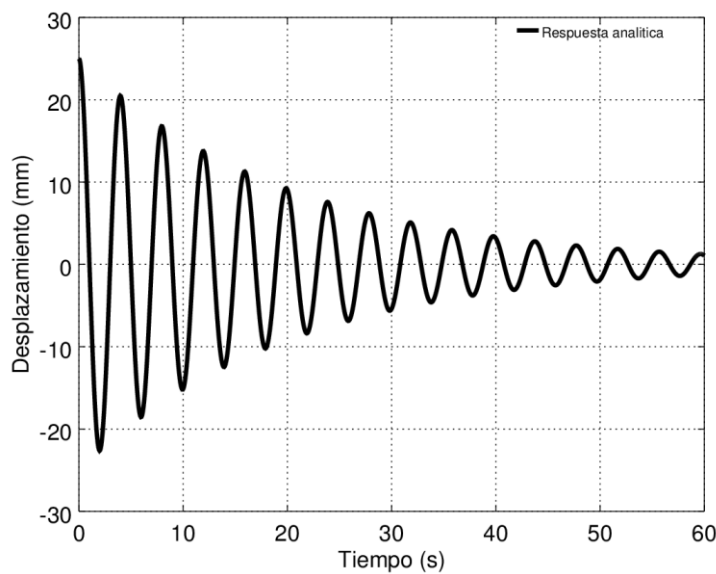


Figura 2-2. Desplazamientos de un sistema amortiguado en vibración libre.

2.3 Solución analítica de sistema amortiguado en vibración forzada

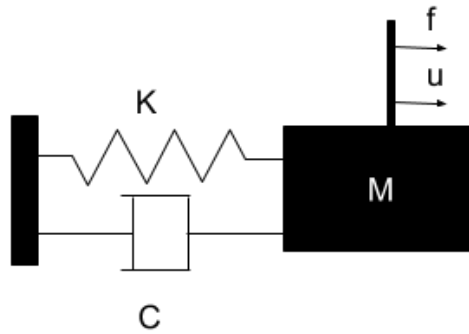


Figura 2-3. Modelo mecánico de un sistema amortiguado de un grado de libertad con fuerza externa aplicada.

Para determinados tipos de simulaciones híbridas puede ser necesaria la aplicación de fuerzas externas en nuestro modelo numérico, pasando a tener el esquema representado en la Figura 2-3, correspondiente a un sistema de un grado de libertad amortiguado sometido a la aplicación de una fuerza externa senoidal de valor f_0 y frecuencia ω , cuya ecuación diferencial de gobierno se expone a continuación:

$$M \ddot{u}_{n+1} + C \dot{u}_{n+1} + K u_{n+1} = f_0 \cos(\omega t) \quad (2-5)$$

La solución a esta ecuación estará compuesta a su vez de dos soluciones independientes, una la correspondiente a la vibración libre del sistema partiendo desde unas determinadas condiciones iniciales y otra correspondiente a la fuerza senoidal aplicada sobre el sistema. La solución de este sistema será, por tanto, el resultado de la combinación de las dos soluciones individuales anteriores, denominadas homogénea y particular. Este resultado se muestra en la siguiente expresión:

$$x(t) = e^{-\zeta \omega_n t} [A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)] + [A_3 \cos(\omega) + A_4 \sin(\omega)] \quad (2-6)$$

con:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (2-7)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{C}{M \omega_n} \quad (2-8)$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

siendo ω_n la frecuencia natural del sistema, ζ el amortiguamiento y ω_d la frecuencia del sistema amortiguado. Los valores de amplitud de la solución particular se pueden calcular como:

$$A_3 = f_0 \frac{\omega_n^2 - \omega^2}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2} \quad (2-9)$$

$$A_4 = f_0 \frac{2\zeta\omega_n\omega}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2} \quad (2-10)$$

Los valores de la solución homogénea, A_1 y A_2 pueden ser obtenidos mediante el empleo de algún software de cálculo simbólico [5].

2.4 Introducción a los métodos de integración numérica

Los métodos explícitos e implícitos son diferentes enfoques empleados en el análisis numérico para obtener soluciones numéricas a las ecuaciones diferenciales parciales y ordinarias dependientes del tiempo, como se requiere en las simulaciones por ordenador de sistemas físicos. Los métodos explícitos se basan en el cálculo del estado de un sistema en un momento posterior a partir del estado del sistema en el momento actual, mientras que los métodos implícitos obtienen una solución resolviendo una ecuación que involucra tanto el estado actual del sistema como el posterior [6].

Dado que la ecuación a resolver en los métodos implícitos contiene a la variable buscada tanto en un lado como en otro de la ecuación, estos métodos requieren de un cálculo adicional, ya que deben primero resolver esta ecuación, por lo que su implementación es más compleja. Es en los problemas rígidos (un sistema rígido es uno que tiene componentes que cambian rápidamente, junto con componentes de cambio lento) en donde estos métodos de integración muestran su potencial, ya que el uso de un método explícito para estos problemas requeriría pasos de integración poco prácticos para mantener un error reducido [7]. El empleo de un método implícito en estos casos permite una gran reducción de tiempo a costa de una mayor complejidad en el cálculo, es por esto por lo que la elección de un método explícito o implícito depende del problema a resolver.

2.4.1 El método de Newmark

El algoritmo empleado para la resolución numérica de las ecuaciones diferenciales que gobiernan nuestro modelo computacional será el algoritmo de *Newmark*, el cual es un método de integración numérica empleado para la resolución de ecuaciones diferenciales, como las que emplearemos en este trabajo [8]. Es comúnmente usado para la evaluación de la respuesta dinámica de estructuras y sólidos. El nombre del método es debido a *Nathan M. Newmark*, profesor de Ingeniería Civil de la Universidad de Illinois, quién lo desarrolló en 1959 para su uso en dinámica estructural [9].

Partiendo del sistema representado en la Figura 2-1 podemos obtener la ecuación de equilibrio del sistema, la cual será resuelta para el instante $n+1$ (indicado por el subíndice de la variable u) por este método:

$$M \ddot{u}_{n+1} + C \dot{u}_{n+1} + K u_{n+1} = 0 \quad (2-11)$$

El método se inspira a su vez en *el teorema del punto medio extendido*, de modo que la velocidad puede ser expresada como:

$$\dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + \Delta t \cdot \ddot{u}_\gamma \quad (2-12)$$

en donde:

$$\ddot{u}_\gamma = (1 - \gamma)\ddot{u}_n + \gamma \cdot \ddot{u}_{n+1} \quad (2-13)$$

y

$$\dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + (1 - \gamma)\Delta t \cdot \ddot{u}_n + \gamma\Delta t\ddot{u}_{n+1} \quad (2-14)$$

Para corregir la variación de la aceleración con el tiempo se hace necesario la adición de un término de segundo orden:

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t\dot{u}_n + \frac{1}{2}\Delta t^2\ddot{u}_\beta \quad (2-15)$$

donde:

$$\ddot{u}_\beta = (1 - 2\beta)\ddot{u}_n + 2\beta\ddot{u}_{n+1} \quad (2-16)$$

Tomando $\gamma=0.5$ y $\beta=0.25$, tal como indica este método, obtendríamos finalmente las siguientes expresiones:

$$\dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_n + \ddot{u}_{n+1}) \quad (2-17)$$

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \dot{u}_n + \frac{1 - 2\beta}{2}\Delta t^2\ddot{u}_n + \beta\Delta t^2\ddot{u}_{n+1} \quad (2-18)$$

Obteniendo por tanto la expresión del desplazamiento en el instante $n+1$. Haciendo esto sucesivamente en todo el rango de integración deseado obtendremos finalmente la solución numérica a nuestro problema.

2.4.2 Solución numérica de un problema acoplado

El algoritmo de *Newmark*, anteriormente explicado será aplicado a continuación para la resolución de un problema en el que ambos subsistemas (tanto el numérico como el experimental) son totalmente conocidos, es decir, se conocen todos sus parámetros dinámicos y condiciones iniciales. No obstante, su comportamiento es desconocido, y la determinación de la respuesta será el objetivo de la aplicación de este algoritmo.

El problema objeto de la aplicación del algoritmo de *Newmark* se muestra en la Figura 2-4. Este sistema a su vez está constituido por dos subsistemas de un grado de libertad con diferentes valores de sus parámetros dinámicos acoplados mediante un vínculo rígido que los interconecta igualando sus desplazamientos. Este

elemento será el encargado de transmitir entre los dos subsistemas la fuerza de interacción, representadas en este texto mediante la letra λ .

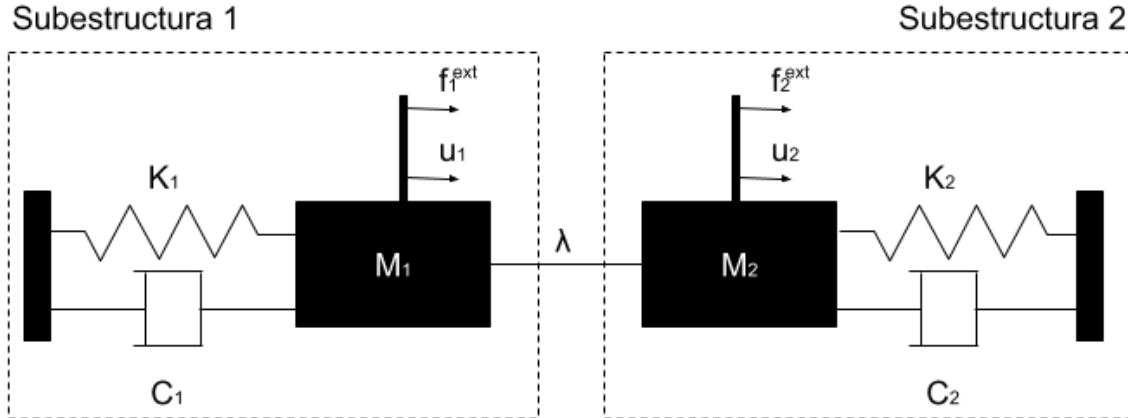


Figura 2-4. Problema analizado, objeto de aplicación del algoritmo de *Newmark* constituido por dos subsistemas amortiguados de un grado de libertad interconectados por un vínculo rígido denotado por λ .

La determinación del comportamiento de este sistema se resumiría en la resolución del siguiente sistema de ecuaciones, expresado en este caso en forma matricial. La primera de ellas no es más que la ecuación de equilibrio dinámico, obtenida mediante una simple aplicación de la segunda Ley de Newton. La otra indica la restricción a la que están sometidos ambos subsistemas, que le obliga a desplazarse de forma simultánea, como consecuencia de la unión vincular perfectamente rígida entre ellos:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{B}\lambda_{n+1} = \mathbf{f}^{n+1} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{u}_{n+1} = 0 \end{cases} \quad (2-19)$$

donde λ_{n+1} representa al multiplicador de Lagrange, \mathbf{M} la matriz de masa, \mathbf{C} la matriz de amortiguamiento, \mathbf{K} la matriz de rigidez del sistema y \mathbf{B} una matriz que permite definir el vínculo rígido existente entre los dos subsistemas de forma matricial, definidas como:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}; \mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (2-20)$$

Definiendo \mathbf{g}_{n+1} como una aproximación explícita del siguiente desplazamiento, expresado de forma matemática como:

$$\mathbf{g}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{1-2\beta}{2} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_n \quad (2-21)$$

y la sustituimos en la ecuación de equilibrio (2-19), tendremos la siguiente igualdad:

$$\mathbf{M} \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{g}_{n+1}) + \mathbf{C} [\dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{u}}_n + \frac{\gamma}{\beta \cdot \Delta t} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{g}_{n+1})] + \mathbf{K} \mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{B} \lambda_{n+1} = \mathbf{f}_{ext}^{n+1} \quad (2-22)$$

Llamando:

$$\mathbf{K}_d = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \cdot \Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K} \quad (2-23)$$

a la rigidez dinámica del sistema y

$$\mathbf{b}^{n+1} = \mathbf{f}_{ext}^{n+1} + \left(\frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \cdot \Delta t} \right) \mathbf{g}^{n+1} - \mathbf{C} (\dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{u}}_n) \quad (2-24)$$

al término libre, podemos sustituir tanto \mathbf{K}_d como \mathbf{b}^{n+1} en la ecuación (2-22) obteniendo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_d \mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{B} \lambda_{n+1} = \mathbf{b}_{n+1} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{u}_{n+1} = 0 \end{cases} \quad (2-25)$$

el cual puede ser expresado también en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_d & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{n+1} \\ \lambda_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_{n+1} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-26)$$

Despejando \mathbf{u}_{n+1} de la primera ecuación del conjunto (2-25) obtenemos:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{K}_d^{-1} (\mathbf{b}_{n+1} - \mathbf{B} \lambda_{n+1}) \quad (2-27)$$

y sustituyendo la ecuación (2-27) en la segunda ecuación del conjunto (2-25) se obtiene:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{K}_d^{-1} (\mathbf{b}_{n+1} - \mathbf{B} \lambda_{n+1}) = 0 \quad (2-28)$$

Despejando de esta última ecuación se puede obtener el valor de λ_{n+1} :

$$\lambda_{n+1} = [\mathbf{B}^T \mathbf{K}_d^{-1} \mathbf{B}]^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}_d^{-1} \mathbf{b}_{n+1} \quad (2-29)$$

el cual tras ser sustituido en la ecuación (2-27) nos permite obtener el valor de \mathbf{u}_{n+1} .

Una vez obtenido \mathbf{u}_{n+1} podemos ya obtener el valor del resto de variables empleando para ello las siguientes expresiones, proporcionadas por el método de *Newmark*:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{K}_d^{-1}(\mathbf{b}_{n+1} - \mathbf{B}[\mathbf{B}^T \mathbf{K}_d^{-1} \mathbf{B}]^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}_d^{-1} \mathbf{b}_{n+1}) \quad (2-30)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{g}^{n+1}) \quad (2-31)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t((1 - \gamma)\ddot{\mathbf{u}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}) \quad (2-32)$$

Realizando este proceso de resolución de forma numérica, para cada instante de tiempo de nuestro intervalo de simulación obtendremos la evolución temporal de nuestro sistema en el periodo deseado.

2.4.3 Solución híbrida de un problema acoplado

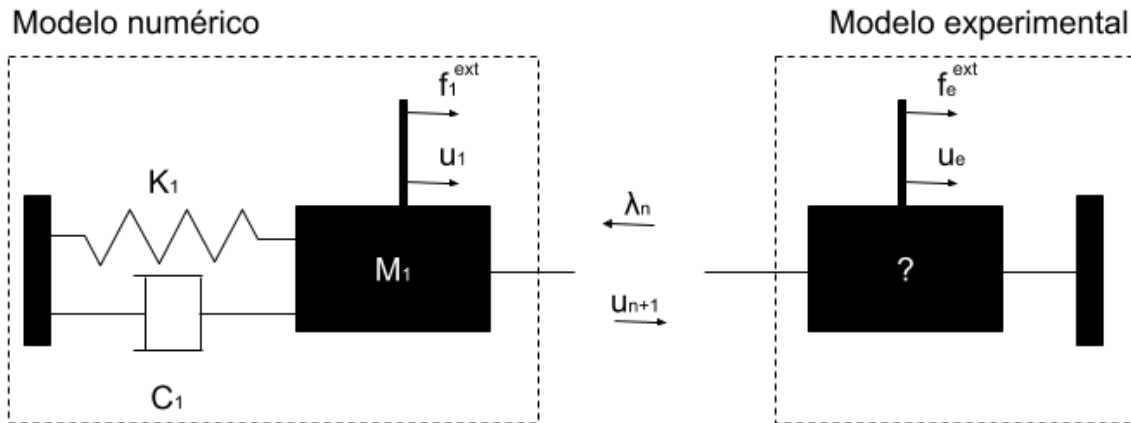


Figura 2-5. Modelo numérico acoplado con el experimental mediante desplazamiento u y reacción λ .

Un método de resolución implícito es aquel que emplea tanto el estado actual como el estado anterior de nuestro sistema para la obtención de la solución, estando presente por tanto la variable a obtener en ambos lados de la ecuación, por lo que, al menos de forma directa no es posible obtener su valor. En nuestro caso, si intentamos resolver el sistema directamente encontraríamos que la solución del sistema está afectada por las fuerzas ejercidas, y al desconocerse el comportamiento del sistema experimental no se pueden predecir las fuerzas, y, por tanto, tampoco los desplazamientos. Una forma de esquivar este problema consiste en el desacoplamiento, mediante el cual cambiaremos el sistema acoplado por el de la Figura 2-5, y obtendremos un nuevo sistema de ecuaciones, expresado en forma matricial, esta vez sí resoluble por este método:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \\ \lambda_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_{n+1} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-33)$$

donde:

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} f_1^{ext} \\ f_e^{ext} \end{Bmatrix} \quad (2-34)$$

representa al vector de fuerzas del sistema.

Como se puede ver, ahora al sistema analítico se le proporcionará una fuerza en cada instante de tiempo, con la cual se podrá calcular un desplazamiento que será enviado posteriormente al sistema experimental, para obtener una nueva fuerza. Este método será por tanto el empleado en la realización de las simulaciones híbridas, en las que tenemos tanto una parte numérica como otra experimental.

Aunque de este modo se ha solucionado el problema, el coste de esto no ha sido gratuito, ya que como se puede observar en la Figura 2-5, los datos intercambiados entre ambos subsistemas no corresponden al mismo instante de tiempo, sino que se ha producido un desfase temporal entre ambos, que es a su vez lo que nos permite resolver el problema mediante un método implícito. Esta no coincidencia temporal entre los dos subsistemas podría implicar un cierto error, como resultado de no trabajar con datos instantáneos, el cual puede ser reducido hasta valores más que aceptables si se trabaja con unos pasos de integración reducidos y una frecuencia de adquisición de datos o frecuencia de muestreo razonable. A continuación, se detalla el proceso de aplicación de este método.

Se suponen conocidas las variables de masa, rigidez y amortiguamiento del subsistema numérico, M_1, K_1, C_1 . También son conocidas las condiciones iniciales del sistema, como la posición, velocidad y la aceleración. La aceleración del sistema no puede ser seleccionada de forma arbitraria, sino que, una vez definida las otras dos variables (posición y velocidad inicial), debe obedecer a la siguiente expresión:

$$\ddot{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}_0 - \mathbf{K}\mathbf{u}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_0) \quad (2-35)$$

Una vez conocida estas variables pasaríamos a obtener también el valor de la fuerza inicial, f_0 , la cual será proporcionada por el subsistema experimental. Una vez obtenidos todos los valores iniciales necesarios podemos comenzar con el algoritmo de cálculo.

En primer lugar, incrementamos la variable temporal un valor igual al del incremento de tiempo definido por Δt :

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t \quad (2-36)$$

A continuación, pasamos a calcular la pareja de valores predichos o estimados, denotados con el superíndice P:

$$\begin{cases} \dot{u}_{n+1}^P = \dot{u}_n + (1 - \gamma)\Delta t \cdot \ddot{u}_n \\ u_{n+1}^P = u_n + \dot{u}_n\Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2\ddot{u}_n \end{cases} \quad (2-37)$$

Una vez obtenidos estos valores enviamos a nuestro actuador el valor de posición predicha para que se sitúe en él. El sistema, una vez alcanzado esta posición nos devolverá el valor de la fuerza que está ejerciendo para poder mantener esa posición, denominada λ_{n+1}^P en este caso.

La obtención de esta fuerza nos permitirá hallar el valor de la aceleración en el instante de tiempo analizado, \ddot{u}_{n+1} , como se muestra en el siguiente par de ecuaciones:

$$\begin{cases} \widehat{M}_1 = M_1 + \gamma \Delta t C_1 + \beta \Delta t^2 K_1 \\ \ddot{u}_{n+1} = \widehat{M}_1^{-1} (\lambda_{n+1}^P - C_1 \cdot \dot{u}_{n+1}^P - K_1 \cdot u_{n+1}^P) \end{cases} \quad (2-38)$$

donde λ_{n+1}^P representa la respuesta del experimento al aplicar u_{n+1}^P .

Tras obtener el valor real de la aceleración para el instante $n + 1$ procedemos a obtener los valores reales también para la velocidad y posición, los cuales carecen del superíndice P, mediante la siguiente corrección:

$$\begin{cases} \dot{u}_{n+1} = \dot{u}_{n+1}^P + \gamma \Delta t \ddot{u}_{n+1} \\ u_{n+1} = u_{n+1}^P + \beta \Delta t^2 \ddot{u}_{n+1} \end{cases} \quad (2-39)$$

Una vez llegados a este punto ya tendríamos todas las variables cinemáticas y dinámicas del instante $n + 1$ y podríamos pasar a calcular las del instante siguiente, $n + 2$, volviendo a comenzar de nuevo el proceso por la ecuación (2-36). Realizaríamos esto sucesivamente hasta llegar al final del ensayo, obteniendo de este modo la simulación híbrida en el periodo de tiempo considerado.

En la Figura 2-6 se puede ver de forma gráfica lo anteriormente explicado.

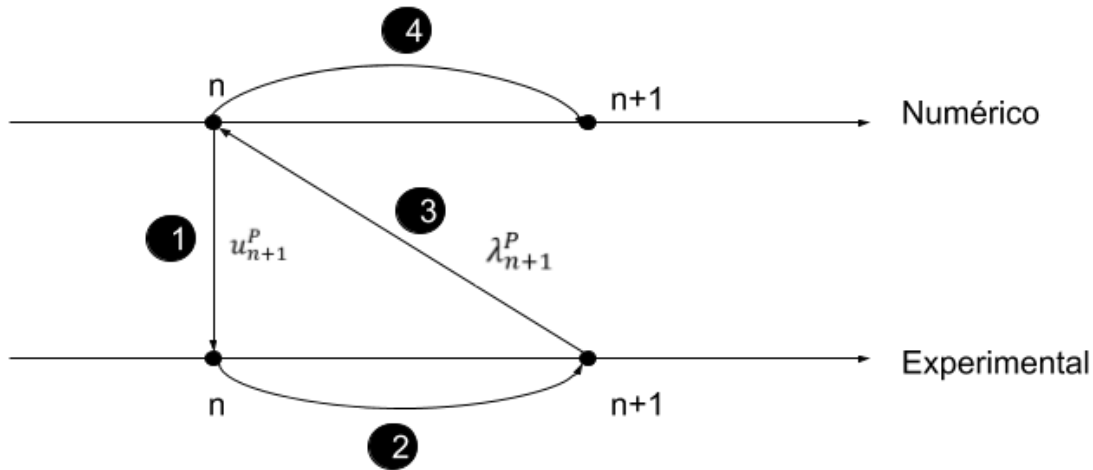


Figura 2-6. Interacción entre subsistemas numérico-experimental en la simulación híbrida de un problema acoplado.

Partiendo del instante n del subsistema numérico, lo siguiente que se hace es enviar al subsistema experimental la predicción de la posición que se ha calculado, según las ecuaciones (2-37). Una vez que el subsistema experimental ha recibido el valor predicho lo siguiente que hará será desplazarse a él, mediante el empleo de los actuadores, con lo cual el instante de tiempo pasaría a ser el $n+1$. Tras alcanzar esta posición nos hallaríamos en condiciones de solicitar al sensor de fuerza el valor de la fuerza que está ejerciendo, denotada en nuestro caso como λ_{n+1} , la cual será enviada al algoritmo del subsistema numérico.

Mediante la aplicación de las ecuaciones (2-38) puede obtenerse el valor “real” de la aceleración para el instante $n+1$ y a partir de esta aceleración, y tras aplicar las ecuaciones (2-39), obtendremos los valores “reales” de desplazamiento y velocidad, ya que los que teníamos hasta ahora era simplemente una predicción del comportamiento del sistema. Una vez llegados a este punto, comenzaríamos de nuevo el ciclo, realizando los mismos pasos hasta alcanzar el instante $n+2$ y así sucesivamente hasta llegar al instante final de nuestro periodo de simulación.

3 DESCRIPCIÓN DEL MONTAJE

3.1 Introducción y objetivos

El objetivo de este trabajo es doble. Por un lado, desarrollar y construir los medios necesarios para poder ensayar un elemento estructural del que se desconoce por completo su comportamiento, y no se quiere o no se puede obtener un modelo numérico de este, y por otro lado proponer un algoritmo adecuado que permita realizar una simulación híbrida permitiendo por tanto el ensamblaje de ambos subsistemas, numérico y experimental.

En este capítulo nos centraremos en la descripción en detalle del banco de ensayos desarrollado. Podríamos decir que el objetivo de este montaje es la obtención de un banco de ensayos que nos permita obtener unos valores suficientemente exactos para el análisis de los resultados y algoritmos de simulación híbrida empleados, teniendo en cuenta las limitaciones técnicas y económicas.

3.2 Estructura y bancada

Para la construcción del modelo experimental a ensayar, desde el punto de vista práctico, lo único que necesitaríamos sería un elemento al que poder aplicarle un cierto desplazamiento, y que este, fruto de su rigidez ofrezca una determinada fuerza o resistencia, sin importar si la relación entre la fuerza y el desplazamiento es o no lineal. Dicho esto, se podría pensar en el uso de un muelle como elemento a ensayar, tendríamos en este caso un elemento cuyo comportamiento sería prácticamente lineal, lo cual podría ayudar a simplificar el estudio de los futuros resultados. Además, la simplicidad de este elemento no afecta al desarrollo de los algoritmos de solución, los cuales podrían funcionar con cualquier otro elemento elástico.

Este elemento tan simple puede parecer una buena opción para nuestro modelo, pero la necesidad de poder aplicar fuerzas no solo de tracción sino también de compresión hace que deje de serlo, ya que para conseguir esto necesitamos no solo un muelle sino un resorte con un pistón en su interior (similar a un amortiguador), que a su vez no produjese amortiguamiento, para no distorsionar los resultados.

Es por esto por lo que se empleó algo igual de simple pero más ventajoso en varios aspectos. Para ello se construyó una pletina de 5mm de metacrilato, a la cual se le realizó un doblado de 90° mediante calentamiento de la línea de curvatura. Este elemento tiene un comportamiento muy lineal, además de un casi nulo amortiguamiento, y permite aplicar sin problemas fuerzas de tracción y compresión. Además de lo anterior simplifica enormemente el montaje al integrarse fácilmente con la bancada.

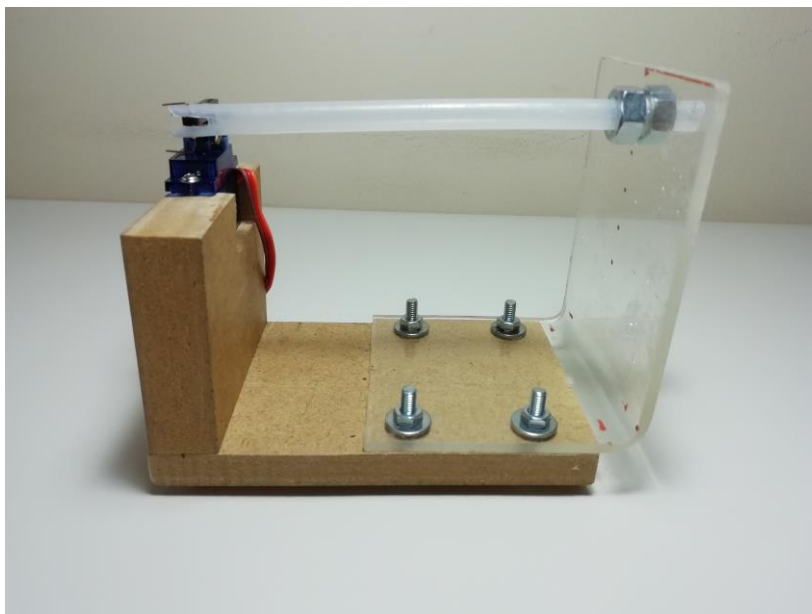


Figura 3-1. Estructura del montaje experimental, bancada de tablero aglomerado junto a elemento flector de metacrilato.

En cuanto a los detalles constructivos de la bancada, para la fabricación del elemento flector se empleó un material que flexible, como es el metacrilato de bajo espesor el cual se ancló a una plancha de tablero aglomerado de densidad media, de un espesor suficiente como para ser considerado indeformable. El montaje final se aprecia en la Figura 3-1. Si el soporte se hubiese construido de un material de la misma rigidez que el del elemento flexible, la bancada también hubiese sufrido deformaciones del mismo orden que las de la estructura, anulando la validez de los resultados, por lo que finalmente se decidió emplear distintos materiales.

3.3 Selección del actuador

En base a lo comentado anteriormente, podríamos clasificar nuestra estructura como de elevada flexibilidad, de modo que, en nuestro caso, según lo explicado en la introducción lo recomendable podría ser montar un actuador con control en desplazamiento, más recomendable para elementos de relativa baja rigidez.



Figura 3-2. Actuador hidráulico, neumático y mecánico.

Actualmente en el mercado existen multitud de actuadores, y con diferentes principios de funcionamiento, como hidráulicos, neumáticos, mecánicos, electromagnéticos, etc. A continuación, se detallarán los criterios empleados para la selección del adecuado.

- **Hidráulicos:** Los actuadores hidráulicos son frecuentemente empleados en todo tipo de maquinaria industrial, ya que tienen una excelente capacidad para aplicar grandes fuerzas. En nuestro caso particular cuenta con numerosos inconvenientes, entre los que destacan su elevadísimo precio, tanto del componente en sí como del resto de elementos necesarios para hacerlo funcionar, como bomba, válvulas, etc. además de necesitar uno de doble efecto para poder simular fuerzas de tracción y compresión. También tienen otro inconveniente y es normalmente en ellos es conocida la fuerza aplicada (mediante la medición de la presión en el circuito) pero no el desplazamiento. Además, este tipo de actuadores no se caracterizan precisamente por su velocidad. Dicho lo anterior este elemento quedaría descartado.
- **Neumáticos:** Los actuadores neumáticos suelen tener un coste bastante inferior a los hidráulicos además de producir normalmente menos fuerza que los otros, lo cual en nuestro caso sería recomendable, sin embargo, sigue presentando problema de coste del resto de componentes (compresor, electroválvula...) y de control en desplazamiento.
- **Electromagnéticos:** Estos actuadores son comúnmente empleados en sistema como puertas automáticas, electroválvulas, etc. y aunque su precio es normalmente muy reducido presenta algunos inconvenientes. El principal es que no se suele controlar ni su posición ni su fuerza, es decir, suele tener únicamente dos posiciones, abierto y cerrado, determinado por el paso de la corriente por un solenoide, de modo que no valdría para nuestro proyecto.
- **Mecánicos:** Por último, pasamos a analizar los actuadores mecánicos. Estos actuadores pueden ser de diferentes tipologías (lineales, rotativos...), pero suelen tener las mismas características. Los actuadores mecánicos suelen ser utilizados en tareas que requieren de elevada precisión, como el posicionamiento en máquinas de mecanizado CNC, impresoras 3D, etc. Además, su coste es por lo general muy variable, y depende evidentemente de sus prestaciones, pero suelen ser relativamente económicos. El control de su posición es otra ventaja, ya que nos permiten realizar un control en desplazamiento.

Visto lo anterior podríamos afirmar que el actuador mecánico es el que mejor se ajusta a nuestras necesidades, por precio, rango de fuerza, control en posición, facilidad en su control, etc. Dentro de estos actuadores mecánicos podríamos encontrar a su vez dos tipos principalmente, actuadores lineales y actuadores rotativos. Comentemos sus ventajas e inconvenientes de cara a su selección.

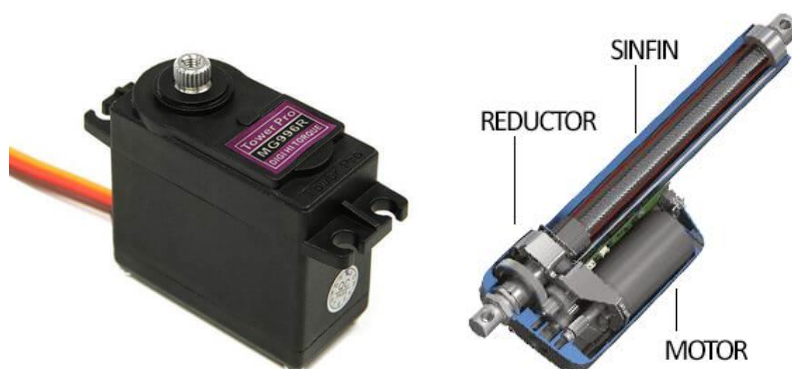


Figura 3-3. Actuador rotativo (servo) y actuador lineal.

- **Actuador lineal:** Como su propio nombre indica es aquel en el cual el movimiento se realiza de forma lineal. Suelen emplear un mecanismo de hélice actuado por un motor en el extremo del tornillo, de modo que rotando un número de vuelta este motor se conoce el avance de la tuerca. Aunque en principio este sistema parece adaptarse a nuestras necesidades tiene un inconveniente que no puede ser despreciado, y es su baja velocidad, la cual podría no ser suficiente para simular una oscilación de una estructura a una adecuada frecuencia de oscilación.
- **Actuador rotativo (servo):** Un actuador rotativo con control en posición es conocido comúnmente como *servo*. Un servo permite especificar un valor angular y mantenerlo en esa posición, aunque se ejerzan fuerzas externas que intenten modificarlo, como puede suceder en las alas de un avión de aeromodelismo. Si se asume que en nuestro modelo físico el desplazamiento siempre va a ser de unos cuantos milímetros podría emplearse un servo para producir un movimiento lineal, ya que se puede aproximar un giro a un desplazamiento lineal si el giro es lo suficientemente reducido. En capítulos posteriores se detallará como de reducido se entiende que tiene que ser este giro y que error estamos cometiendo al asumir esta hipótesis.

Dicho lo anterior toca seleccionar nuestro actuador, siendo la elección de este influenciada por los productos disponibles en el mercado. Aunque el actuador lineal parece el más adecuado para replicar un movimiento lineal tras una búsqueda exhaustiva de los artículos disponibles se ha encontrado que la mayoría de los actuadores lineales tienen una velocidad de desplazamiento muy reducida, alta inercia (lo cual penaliza enormemente la recreación de una oscilación) además de no venir en casi ningún caso con el sistema de control integrado, el cual debería ser montado aparte. Además, el conjunto del mecanismo en sí y el sistema de control tendría un precio relativamente elevado si lo comparamos con otras opciones.

La otra opción eran los actuadores rotativos o servos. Estos dispositivos, usado en multitud de aplicaciones, como robótica y aeromodelismo son muy competitivos en cuanto a precio y prestaciones se refiere. También cuentan con un sistema de posicionamiento y control integrado sencillo de conectar y una gran comunidad de personas proveyendo información, librerías para las placas controladoras, etc.

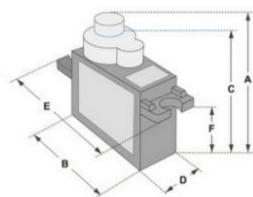
A su vez dentro de los servos a una gran cantidad de modelos disponibles, pero para no extendernos diremos que, por regla general, cuanto mayor sea la fuerza que desarrolla el servo menor suele ser su velocidad angular. En este caso, como queremos un sistema rápido y la fuerza necesaria no es demasiado elevada emplearemos un servo de reducido tamaño pero gran velocidad, con engranajes plásticos para reducir el momento de inercia, de cara a aumentar la frecuencia que serán capaces de simular. Concretamente el popular modelo SG90, cuyo aspecto y características técnicas se muestran en la Figura 3-4.

SERVO MOTOR SG90

DATA SHEET



Tiny and lightweight with high output power. Servo can rotate approximately 180 degrees (90 in each direction), and works just like the standard kinds but smaller. You can use any servo code, hardware or library to control these servos. Good for beginners who want to make stuff move without building a motor controller with feedback & gear box, especially since it will fit in small places. It comes with a 3 horns (arms) and hardware.



Position "0" (1.5 ms pulse) is middle, "90" (~2ms pulse) is middle, is all the way to the right, "180" (~1ms pulse) is all the way to the left.

Dimensions & Specifications	
A (mm) :	32
B (mm) :	23
C (mm) :	28.5
D (mm) :	12
E (mm) :	32
F (mm) :	19.5
Speed (sec) :	0.1
Torque (kg-cm) :	2.5
Weight (g) :	14.7
Voltage :	4.8 - 6

PWM=Orange (JLJ)
Vcc=Red (+)
Ground=Brown (-)

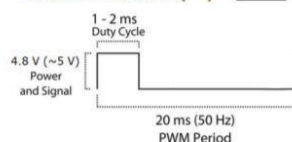


Figura 3-4. Servo SG90. Características técnicas y dimensiones.

Como se puede ver entre sus características principales destacan su velocidad de rotación ($0.1 \text{ s} / 60^\circ$), y su momento de fuerzas, el cual es suficiente para nuestro propósito. Este dispositivo está dotado de tres pines de conexión, dos de los cuales serían empleado para la alimentación y el tercero estaría destinado a la señal de control del dispositivo. Esta señal de control permite posicionar el servo en un valor angular concreto, comprendido entre 0° y 180° , y el servo, mediante un controlador proporcional se encargaría de mantener el valor angular constante ante perturbaciones externas.

Como puede apreciar la comunicación entre la unidad de control y el servo es unidireccional, de manera que el servo recibe información, pero en ningún caso la envía. Esto tiene ciertas implicaciones que serán analizadas en próximos capítulos.

3.4 Medición de la fuerza aplicada

Como hemos comentado, se ha optado por un sistema con control en desplazamiento, de manera que evidentemente la posición será conocida, ya que es extraída de la simulación numérica. La variable para medir por tanto en nuestro montaje será la fuerza que está aplicando en tiempo real el servo sobre la estructura.

Dicho lo anterior, se debe buscar alguna forma que nos permita determinar la fuerza aplicada. De nuevo, tal como ocurría en el caso del actuador tenemos varias opciones para lograr este propósito. La conveniencia de una u otro será evaluada en función de aspectos tanto técnicos como económicos.

- Célula de carga: Una célula de carga es un dispositivo basado en una “galga extensométrica”, la cual permite registrar variaciones de tensión en la pieza metálica que la soporta. Estas variaciones de tensión

son amplificadas por un “Puente de Wheatstone”, el cual permite finalmente obtener la carga aplicada. Para nuestro propósito particular estas celdas tienen un inconveniente y es que estas pensadas por lo general, para grandes cargas, ya que se suelen emplear para pesajes industriales, ensayos de tracción, etc. Esto es debido a que requieren una deformación en el material para poder funcionar, de modo que la precisión y rango de medidas sería no se ajustaría a nuestro modesto montaje.

- **Sensor piezoeléctrico:** Un sensor piezoeléctrico es un dispositivo que aprovecha el efecto piezoeléctrico para transformar las deformaciones sufridas en variaciones de tensión, de manera que de forma indirecta puede ser obtenida la fuerza aplicada sobre el mismo. En lo que a nosotros respecta, aunque este dispositivo se acerca más a lo necesario tienen dos inconvenientes. El primero de ellos es que, de nuevo la precisión de medida es baja, ya que los rangos de medición exceden los necesarios para este experimento. Además, aunque aplicar fuerzas de compresión sobre este sensor resultaría sencillo, no lo sería tanto traccionar una membrana plástica de tan reducido espesor (décimas de milímetro).
- **Medición de la intensidad:** Un método indirecto de medición podría obtenerse a partir del consumo eléctrico del servo, siempre que este guardase alguna relación con el par aplicado. Si esto fuese así se podría obtener una nube de puntos relacionando estas dos variables, que permitiese obtener una función de ajuste, la cual podría ser implementada y nuestra placa de control. Como se mostrará posteriormente, esta relación existe, y por medio de un medidor de intensidad electrónico, es como se determinará la fuerza aplicada.

El dispositivo necesario para la medición de la intensidad es el módulo ACS712, el cual se muestra en la Figura 3-5. Este dispositivo permite medir tanto corriente alterna como continua, mediante la generación de una señal de tensión analógica en su pin de salida, la cual será función de la intensidad que atraviesen las bornas de medición.



Figura 3-5. Sensor de corriente inductivo ACS712.

La resolución de este dispositivo es del orden de 26 mA, lo cual resulta adecuado para nuestro propósito. Evidentemente una mayor resolución es siempre positiva, pero de todos los métodos de evaluación de fuerza, este, mediante el empleo de este módulo es el que mejor resultados podrá ofrecer.

3.5 Unidad de control

Como se puede intuir la unidad de control es un elemento vital en nuestro sistema, ya que se encarga de gestionar correctamente la interconexión de los elementos que conforman el montaje, y del propio montaje que el computador, que es el encargado de ejecutar los algoritmos de simulación.

De entre la gran variedad de microcontroladores, procesadores, etc. la opción más recomendable sin duda es el uso de un microcontrolador integrado en una placa de desarrollo, dado que el montaje que se está realizando es un prototipo, no un producto comercial. El modelo exacto empleado se observa en la Figura 3-6.

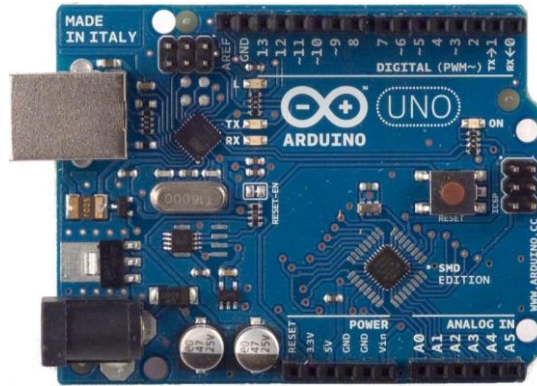


Figura 3-6. Arduino Uno: placa de desarrollo empleada en nuestro montaje para la medición de la fuerza aplicada y control del actuador mecánico.

3.6 Interconexión y alimentación del sistema

Una vez detallado todos los elementos necesarios para el correcto funcionamiento del montaje se muestra un esquema del conexionado de este en la Figura 3-7.

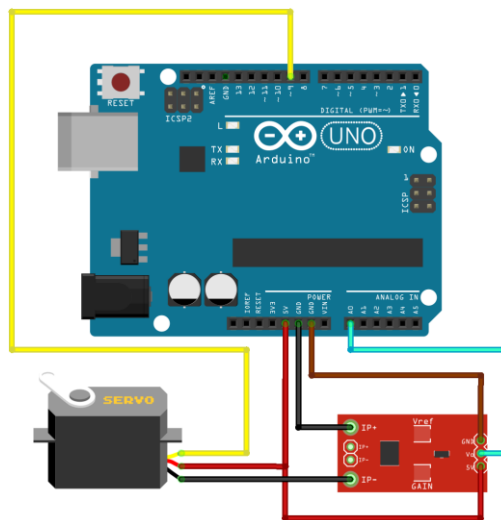


Figura 3-7. Esquema de conexión de nuestro montaje, formado por unidad de control, servo y sensor de intensidad.

Todos los dispositivos emplean una tensión de 5V, la cual es aplicada a través de los cables rojos, empleando el negro para tierra. El servo es controlado mediante un tren de pulsos modulados enviado a través del conductor de señal (cable amarillo) mientras que la lectura analógica del sensor de intensidad es enviada a través del cable azul.

En cuanto al conexionado de nuestro montaje con el exterior:

- Sistema de alimentación: Este permite obtener un voltaje constante en los distintos módulos del montaje. Dado que todos los elementos empleados (placa, sensores, servo...) funcionan a 5V, de manera que la alimentación se realiza desde la propia conexión con el computador mediante el puerto USB.
- Intercambio de datos: Nuestro dispositivo debe permitir el envío y recepción de datos, como por ejemplo la posición a la que tiene que moverse el servo o la fuerza aplicada sobre la estructura. Para ello se empleará el puerto USB de la computadora, y se hará uso del puerto serie (*Serial Interface*) como protocolo de comunicación. Se puede observar cómo tanto la comunicación como la alimentación se realizan por el mismo cable, el cual será USB Tipo A-Tipo B, simplificando el número de elementos que intervienen y existiendo una única tierra para el sistema de comunicación y el de alimentación. Si esto no sucediera se deberían unir las tierras de ambos sistemas, ya que si no se podrían producir problemas que dieran como resultado comportamientos inesperados.

4 FUNCIONAMIENTO DEL SISTEMA

4.1 Introducción

A continuación, se explicará de forma detallada el funcionamiento del dispositivo, el cual constará de dos partes claramente diferenciadas, el hardware y el software, pero que deben ser diseñadas de forma conjunta, si se quiere garantizar el buen funcionamiento de todos los componentes.

4.2 Diagramas de funcionamiento

Nuestro dispositivo consta de una serie de módulos (unidad de control, sensores, servo...) que hacen posible su funcionamiento, estos serán descritos de forma esquemática mediante bloques y diagramas.

4.2.1 Servo SG90

Mediante el empleo de un servo podemos salvar todos los problemas referentes al posicionamiento y control, ya que todo ese proceso será realizado de forma interna por el servo, mediante una unidad de control propia que trae incorporada. En lo que respecta a este dispositivo la única entrada de la que dispondrá será el ángulo en el que se tiene que posicionar, el cual será introducido mediante una señal de pulso modulado. De forma esquemática el funcionamiento interno del servo se muestra en la Figura 4-1, en donde A_{act} representa el ángulo actual del servo y A_{ref} el ángulo de referencia en el que se tiene que posicionar, de modo que restando estos términos y enviándolo al controlador proporcional del servo tendríamos la intensidad a aplicar sobre el motor del dispositivo. De todo este proceso la única variable a definir por nuestra parte será el ángulo de referencia deseado A_{ref} , obtenido del cálculo numérico.

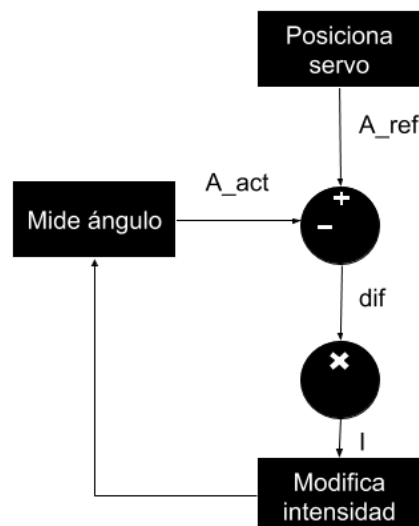


Figura 4-1. Diagrama simplificado del sistema de posicionamiento de un servo.

4.2.2 Medidor digital de intensidad ACS712

El sensor de intensidad nos permite registrar la intensidad que circula por la alimentación del servo y así poder obtener, mediante la recta de ajuste obtenida en el experimento el valor de la fuerza ejercida. La función de este dispositivo es, por tanto, transformar un valor analógico de intensidad en un valor analógico de tensión, el cual estará contenido dentro de un cierto rango, y será transformado a digital por el convertidor ADC (analog to digital converter) de nuestra unidad de control.

4.2.3 Unidad de control

La unidad de control se encarga del control y comunicación con los distintos elementos, incluido el computador, el cual ejecuta el modelo numérico de nuestra simulación. Para su descripción vamos a emplear dos tipos de bloques; por un lado, indicaremos las relaciones entre los componentes con un *Diagrama de Bloques* y por otro el funcionamiento interno de la unidad de control con un *Diagrama de flujo*.

Como se aprecia en la Figura 4-2, la unidad de control mantiene una relación unidireccional con el amperímetro y el servo, ya que únicamente requiere leer el valor de la intensidad e indicar el valor angular, respectivamente. Con el computador en cambio mantiene una relación bidireccional, ya que, por un lado, debe proveer al computador el valor de fuerza aplicado, y por otro debe leer la posición angular de este.

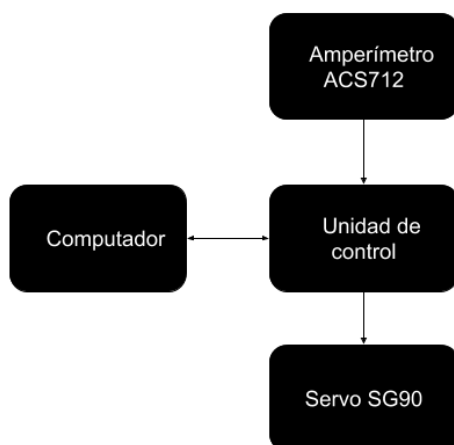


Figura 4-2. Diagrama de bloques: elementos periféricos de la unidad de control.

El bucle realizado por el microcontrolador, así como la comunicación con el computador se aprecia, de forma muy resumida en la Figura 4-3. Se puede ver, por orden temporal, como la unidad de control espera en un bucle infinito a que el computador envíe el siguiente valor angular al que dirigirse (este valor habrá sido obtenido de la simulación numérica), una vez recibido este valor, el microcontrolador procede a posicionar al servo en la posición requerida para, posteriormente, proceder a medir la intensidad, convertirla en fuerza (*Newtons*) y enviarla finalmente al computador.

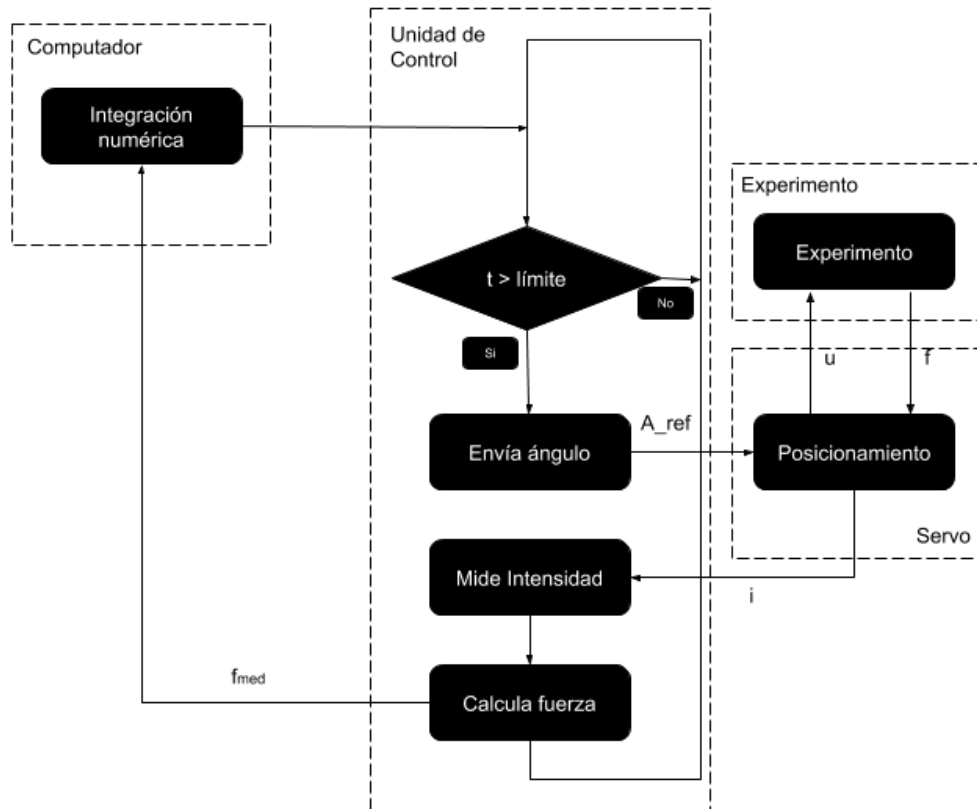


Figura 4-3. Diagrama de flujo del algoritmo ejecutado por la unidad de control e interacción con dispositivos externos.

4.3 Relación Par-Intensidad

Para que la medición del valor de intensidad consumida por el servo SG90 tuviese utilidad para nuestro objetivo antes se tuvo que comprobar que este valor podía ser transformado en un valor de fuerza, que será en nuestro caso la fuerza ejercida sobre la estructura real, y necesaria para el funcionamiento del modelo numérico.

Como sabemos, el servo es un elemento rotativo, y para ser riguroso debemos hablar de momento de fuerzas y no de fuerza como tal. Sin embargo, esto no impide que, una vez conocida el punto de aplicación de la fuerza esta pueda ser conocida simplemente dividiendo el momento de fuerzas por la longitud del brazo, obteniendo así una fuerza en Newtons.

Por tanto, el objetivo será determinar el momento de fuerzas ejercido por el servo en función de la intensidad consumida, para, posteriormente, determinar el valor de la fuerza en función del punto de aplicación de esta. Para ello emplearemos los siguientes elementos.

- Sensor de intensidad ACS712
- Servo SG90
- Microcontrolador
- Recipiente cerrado con un volumen de agua conocido
- Calibre

La disposición del montaje se observa en la Figura 4-4, en la que se ve por un lado el microcontrolador, y conectado a él el amperímetro y el servo. En el extremo del servo se ha colocado, a una distancia conocida medida con el calibre un cordel con un recipiente el cual contiene agua.

El experimento consiste en ir aumentando la cantidad de agua que contiene el depósito, siempre con volúmenes conocidos, para así poder saber la fuerza que se trasmite por el cordel. Esta fuerza será la misma que tendrá que soportar el servo, ya que este se mantiene en un estado de equilibrio, de modo que, anotando los valores de intensidad registrados, tenemos para cada valor de fuerza soportada el valor de la intensidad consumida.

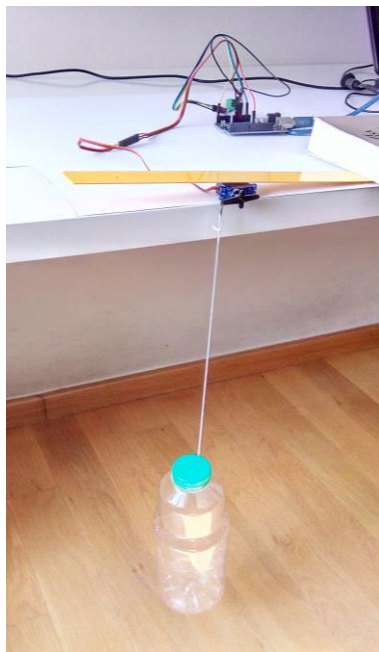


Figura 4-4. Montaje para la medición de la fuerza.

Una vez realizado el montaje y comprobado el correcto funcionamiento de los distintos elementos se pasó a la toma de datos. Variando la masa de agua desde 0.0 kg hasta 1.3 kg con incrementos de 0.1 kg se fueron anotando los valores de intensidad obtenidos. El resultado se observa en la Figura 4-5.

Peso agua (kgf)	Peso total (kgf)	Fuerza total (N)	Valor medido
0,00	0	0	513
0,00	0,048	0,47088	513
0,10	0,148	1,45188	513
0,20	0,248	2,43288	515
0,30	0,348	3,41388	517
0,40	0,448	4,39488	519
0,50	0,548	5,37588	521
0,60	0,648	6,35688	523
0,70	0,748	7,33788	524
0,80	0,848	8,31888	525
0,90	0,948	9,29988	526
1,00	1,048	10,28088	527
1,10	1,148	11,26188	530
1,20	1,248	12,24288	530
1,30	1,348	13,22388	531

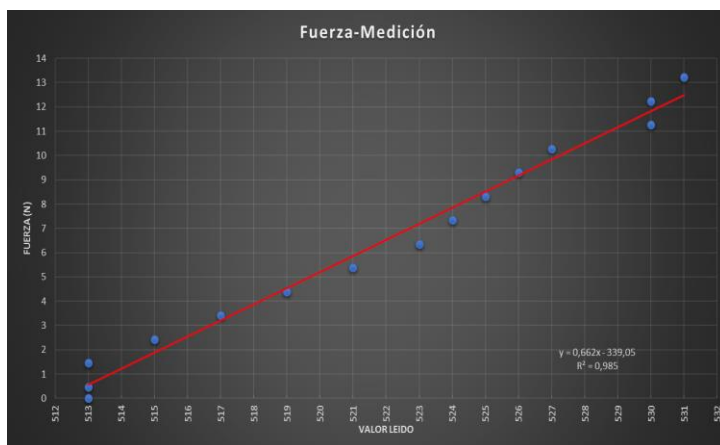


Figura 4-5. Datos del experimento y obtención de la recta de ajuste.

Como se puede observar la relación obtenida entre par e intensidad es bastante lineal, ajustándose por tanto mediante una recta de regresión. En este caso el valor de R (factor que mide la calidad del ajuste de la recta a la nube de puntos) es bastante elevado, siendo de 0.985.

Todo lo anteriormente realizado ha servido para obtener una expresión matemática que nos permita relacionar la fuerza ejercida sobre nuestra estructura con la intensidad medida por nuestro dispositivo. El resultado ha sido la siguiente expresión:

$$F(v) = 0.662v - 339.05 \text{ [N]} \quad (4-1)$$

En donde la F representa la fuerza en Newtons y v el valor analógico registrado.

4.4 Frecuencia máxima de funcionamiento del sistema

A continuación, se determinará la frecuencia máxima a la que se puede registrar datos en nuestro montaje sin que se pierda información. Como ya sabemos, la parte numérica de nuestro sistema será modelada por un sistema amortiguado, el cual, tras ser acoplado a la parte experimental provocará una respuesta oscilatoria.

De los estudios de *H. Nyquist* sabemos que para que una señal discreta pueda ser registrada correctamente esta deberá tener una frecuencia menor a la mitad de la frecuencia de muestreo empleada en la medición de esta señal:

$$f_{max} \leq \frac{f_{muestreo}}{2} \quad (4-2)$$

Cuanto más rápida sea la oscilación necesaria mayor será el número de datos intercambiados, por lo que llegará un momento en el que la frecuencia sea tan elevada que parte de estos datos no puedan ser registrados por nuestro montaje.

A continuación, se determinará la frecuencia de muestreo máxima que somos capaces de medir con nuestro montaje, para ello se debe obtener el tiempo de cálculo de cada uno de los algoritmos que intervienen en cada ciclo de cálculo, por lo que se realizará un ensayo cualquiera y se determinarán estos tiempos, los cuales se muestran en la siguiente tabla.

Periodo de muestreo			
	Numérico	Experimental	TOTAL
Tiempo (s)	0,090	0,052	0,142
	0,091	0,052	0,143
	0,097	0,053	0,150
	0,088	0,050	0,138
	0,089	0,051	0,140
Periodo de muestreo medio (s)			0,143

Tabla 4-1. Tiempos de procesamiento obtenidos entre distintas iteraciones para la obtención de un tiempo de procesamiento medio, necesario para la obtención del periodo de muestreo medio.

Como se puede ver en la Tabla 4-1, el periodo de nuestro medio es de 0.143 s lo que equivale a una frecuencia de muestreo de 7 Hz, de modo que el máximo valor para el cual nuestro sistema funcionaría correctamente sería de 3.5 Hz como frecuencia de oscilación de la estructura. Este valor puede parecer bajo, pero el rango de frecuencia de los sismos, por ejemplo, es bajo también (entre 1 y 10 Hz) por lo que podría ser válido para simular el espectro de baja frecuencia de una oscilación en el terreno.

No obstante, en la construcción de un montaje de mayor nivel la velocidad de cálculo de los procesadores y velocidad lineal de los actuadores aumentarían considerablemente, reduciendo el periodo y aumentando la frecuencia de muestreo, haciendo que estos puedan simular un mayor rango de frecuencias.

4.5 Amplitud máxima de funcionamiento del sistema

Otra de las limitaciones que encontramos en nuestro montaje es la amplitud del desplazamiento máximo que el actuador es capaz de reproducir sobre la estructura real. Como ya se ha explicado, el desplazamiento lineal de la estructura se realiza a través de un servo, unido a la estructura mediante una biela.

Para limitar el desplazamiento se tomará como referencia un error máximo del 7.2% según la aproximación de que un movimiento circular reducido se puede asimilar a uno lineal, o lo que es lo mismo, que según la Figura 4-6 el arco \widehat{ab} se puede considerar similar a la cuerda ab cuando el ángulo A es pequeño. Considerando que el brazo tiene una longitud de 15 mm, para lograr un arco de 10 mm sería necesario un giro de 0.67 rad, lo que proyectados según el eje vertical representan 9.28 mm, y el error relativo sería del 7.2%, como deseábamos.

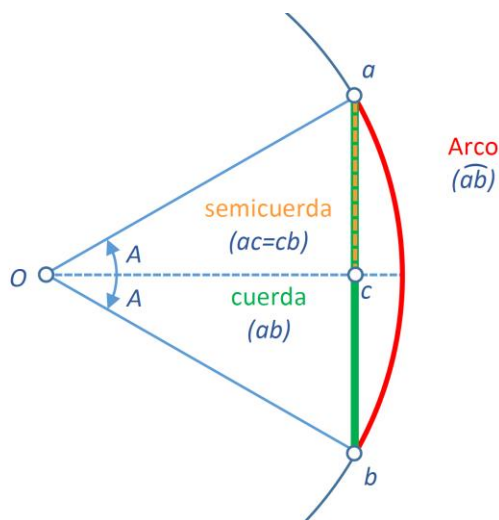


Figura 4-6. Aproximación arco-cuerda empleada en nuestro montaje para aplicación de desplazamiento lineal del servo sobre el elemento flexible.

Se establece por tanto en este trabajo un límite de desplazamiento de 10 mm con un error permisible del 7.2%. Evidentemente el desplazamiento máximo del actuador podría incrementarse aún más a costa de asumir un mayor error, pero en este caso no se ha considerado necesario.

4.6 Fuerza de interacción máxima del sistema

Otra de las limitaciones que presenta nuestro montaje es la fuerza de interacción máxima que es capaz de aplicar nuestro actuador, la cual se puede obtener de la hoja de datos del dispositivo, mostrada en la Figura 3-4. En ella se observa como el par máximo capaz de aplicar es de 2.5 kg·cm, como en nuestro caso el brazo tiene una longitud de 15 mm la fuerza máxima capaz de aplicar a esa longitud será de 1.667 kgf, que equivalen a 16.67 N.

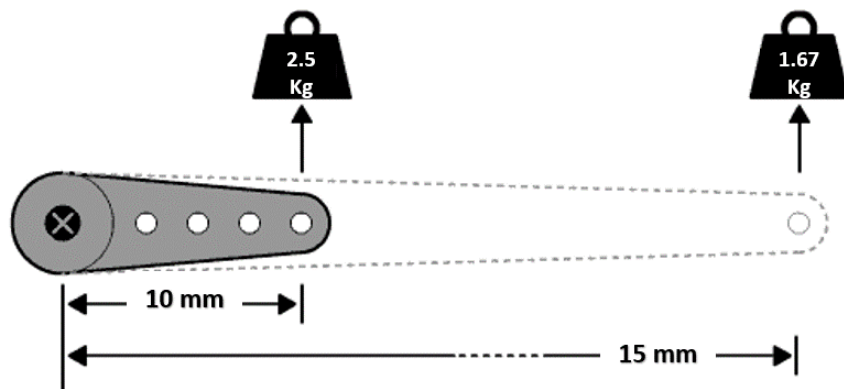


Figura 4-7. Equivalencia entre fuerza aplicada y distancia del punto de aplicación en el servo.

Esto significa que la fuerza que se transfiere de la parte numérica a la parte real a través del vínculo nunca podrá ser mayor de este valor, ya que de ser así nuestro dispositivo no tendría capacidad para simularla. En todas las simulaciones y ensayos que se realicen se deberá comprobar por tanto el cumplimiento de esta condición.

5 IDENTIFICACIÓN DE LOS PARÁMETROS DINÁMICOS DEL MODELO EXPERIMENTAL

5.1 Introducción

Para poder comparar y validar los resultados obtenidos mediante simulación híbrida será necesario identificar las propiedades de masa, amortiguamiento y rigidez del modelo experimental construido, que nos permitan obtener una solución completamente numérica, independiente de la solución híbrida, con el objetivo de poder validar nuestros resultados. Una vez hecho esto, será recomendable comprobar y ajustar estos valores en caso de que fuera necesario para obtener mayor exactitud en las futuras simulaciones. De nuevo se recalca que la simulación híbrida no obliga en absoluto a la obtención de estas propiedades dinámicas, es más, la posibilidad de desconocerlas es su principal ventaja, sin embargo, el fin último de este trabajo es el análisis del funcionamiento del sistema y su comparación con los resultados numéricos, para lo cual es indispensable conocer con relativa exactitud estas propiedades.

5.2 Identificación de los parámetros dinámicos

La Tabla 5-1 muestra los parámetros de simulación seleccionados para los ensayos, en donde se determinan simplemente las condiciones bajo las que se realizarán estas, como las condiciones iniciales de desplazamiento, velocidad y otros parámetros referidos al algoritmo de integración como el incremento de tiempo entre iteración, el número de pasos, la fuerza externa aplicada (que en este caso será cero), y los parámetros β y γ relacionados con el Método de *Newmark* y explicados en el apartado 2 de este texto.

$u_0(m)$	$v_0(m/s)$	$\Delta t (s)$	n_{steps}	$f_{ext}(N)$	β	γ
0.01	0	0.01	1200	0.00	0.25	0.50

Tabla 5-1. Condiciones iniciales y parámetros de integración empleados en el problema de identificación.

En la Tabla 5-2 se definen las propiedades dinámicas empleadas para la primera de las simulaciones. Aunque la selección de las propiedades dinámicas de la parte numérica pueda parecer aleatoria, ya que en principio sería válido cualquier conjunto de valores, esto no es del todo cierto, ya que como se explicó en el apartado 4.4, dadas las limitaciones de hardware de nuestro montaje la frecuencia de vibración tiene que estar por debajo de un determinado valor para que pueda ser registrada correctamente.

PROPIEDADES DINÁMICAS	$M_1(kg)$	$C_1(N \cdot \frac{s}{m})$	$K_1(\frac{N}{m})$
Parte Numérica	34	8.5	30

Tabla 5-2. Propiedades dinámicas de la parte numérica utilizadas para la identificación de propiedades de la parte experimental.

Para la identificación de las propiedades dinámicas restantes del modelo experimental se simulará un sistema híbrido de un grado de libertad en vibración libre como el representado en la Figura 2-5, del que se conocen las propiedades dinámicas (M_1, C_1, K_1) y se desea identificar (M_e, C_e) del sistema experimental a partir de la solución temporal obtenida para el modelo total acoplado mediante:

$$\begin{cases} M_T = M_1 + M_e \\ C_T = C_1 + C_e \\ K_T = K_1 + K_e \end{cases} \quad (5-1)$$

siendo M_T, C_T y K_T las propiedades dinámicas del conjunto formado por el subsistema numérico y el experimental del que identificaremos M_T y C_T para conocer indirectamente M_e y C_e .

5.2.1 Identificación de la rigidez K_e del sistema experimental

Para la identificación de la rigidez simplemente se aplicarán una serie de desplazamientos para posteriormente obtener el valor de la rigidez haciendo uso del desplazamiento aplicado y la fuerza medida por el sensor. En nuestro caso hemos obtenido una rigidez estimada $K_e = 1540$ N/m.

5.2.2 Identificación de la masa M_e del sistema experimental

Para la identificación de la masa del subsistema experimental, emplearemos la curva de respuesta del sistema acoplado en vibración libre, a la cual se le aplicará el método de decremento logarítmico para la obtención indirecta de la masa M_e , como se explica a continuación.

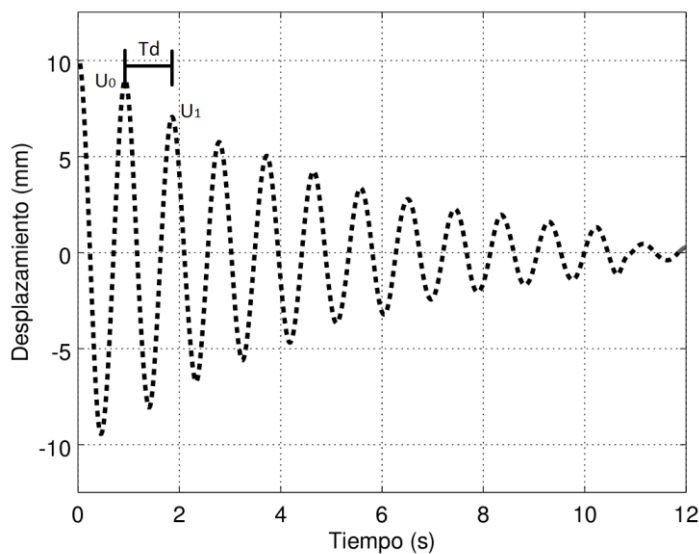


Figura 5-1. Respuesta del sistema numérico-experimental del que se desea obtener el amortiguamiento.

Tras hacer oscilar nuestro sistema híbrido en vibración libre con un desplazamiento distinto de cero hemos obtenido la respuesta mostrada en la Figura 5-1, de la cual el objetivo es la obtención del amortiguamiento del sistema. Definiendo como u_0 y u_1 a dos picos consecutivos de la curva y denominando T_d al lapso entre ellos podemos deducir lo siguiente:

$$\frac{u_0}{u_1} = \frac{Ae^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi)}{Ae^{-\zeta\omega_n(t+T_d)} \cos(\omega_d(t+T_d) - \phi)} \quad (5-2)$$

donde:

$$e^{-\zeta\omega_n(t+T_d)} = e^{-\zeta\omega_n t} \cdot e^{-\zeta\omega_n T_d} \quad (5-3)$$

$$\cos(\omega_d(t+T_d) - \phi) = \cos(\omega_d t + \omega_d T_d - \phi) + \cos(\omega_d t - \phi) \quad (5-4)$$

por lo que la ecuación (5-2) quedaría de la siguiente forma:

$$\frac{u_0}{u_1} = \frac{1}{e^{-\zeta\omega_n T_d}} = e^{\zeta\omega_n T_d} \quad (5-5)$$

Aplicando logaritmos a la expresión anterior obtendríamos el decremento logarítmico δ , expresado como:

$$\delta = \ln\left(\frac{u_0}{u_1}\right) = \zeta\omega_n T_d = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cong 2\pi\zeta \text{ (si } \zeta \text{ es pequeño)} \quad (5-6)$$

de donde obtenemos a su vez el amortiguamiento ζ . Una vez conocido este valor y K_T podemos obtener la masa total M_T , empleando la expresión de la frecuencia natural del sistema amortiguado:

$$\omega_n^T = \frac{2\pi}{T_d \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (5-7)$$

en donde el superíndice T indica que nos referimos al sistema total, formado por el numérico y el experimental. Una vez obtenida la frecuencia natural ω_n^T y tras introducirla en:

$$\omega_n^T = \sqrt{\frac{K_T}{M_T}} \quad (5-8)$$

nos permitiría obtener la masa total del sistema numérico y experimental, M_T . La obtención de la masa experimental M_e , es inmediata aplicando la ecuación (5-1). Todos los valores empleados para el cálculo se muestran en la Tabla 5-3, entre los que se encuentra finalmente la masa del subsistema experimental, $M_e = 0.356$ kg.

u_0/u_1	δ	$T_d (s)$	ζ	$\omega_n^T (rad/s)$	$M_T (kg)$	$M_e (kg)$
8.3/6.87	0.189	0.93	0.03	6.76	34.356	0.356

Tabla 5-3. Parámetros utilizados en el método de decremento exponencial para la determinación de la masa experimental M_e a través de la identificación del amortiguamiento del sistema.

5.2.3 Identificación del amortiguamiento C_e del sistema experimental

Una vez obtenida la masa del sistema experimental, el factor de amortiguamiento del sistema C_T se extrae de la siguiente expresión:

$$C_T = 2\zeta\sqrt{K_T M_T} \quad (5-9)$$

obteniéndose un valor de $C_T = 13.93$ (N·s/m) y, por tanto, mediante la aplicación de la segunda ecuación del conjunto de ecuaciones (5-1) concluiríamos con la identificación del factor de amortiguamiento del sistema experimental, $C_e = 5.43$ (N·s/m).

5.3 Validación de las propiedades identificadas de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema experimental

Lo que se hará a continuación será lo siguiente, se comenzará realizando una comparación entre el resultado de una vibración libre en el problema numérico y en problema híbrido, empleando para ellos las propiedades dinámicas de masa, amortiguamiento y rigidez identificadas y se analizarán las diferencias encontradas en su comportamiento.

En el caso de que estas diferencias sean sustanciales, se procederá a ajustar de forma controlada aquellos factores que causen esta posible distorsión en los resultados, ya sea una sobreestimación en el valor de la rigidez, que haga que la frecuencia de oscilación sea muy elevada, o una mala estimación del valor de amortiguamiento, que haga que el sistema tarde mucho tiempo en estabilizarse, todo ello de cara a obtener un valor más certero que el obtenidos mediante los métodos anteriores.

<i>PROPIEDADES DINÁMICAS</i>	$M_e (kg)$	$C_e (N \cdot \frac{s}{m})$	$K_e (\frac{N}{m})$
<i>Parte Experimental</i>	0.356	5.43	1540

Tabla 5-4. Propiedades dinámicas de la parte experimental a validar.

A continuación, se muestra el desplazamiento obtenido en ambos casos (numérico y experimental) al realizar la simulación híbrida empleando los valores de la Tabla 5-4.

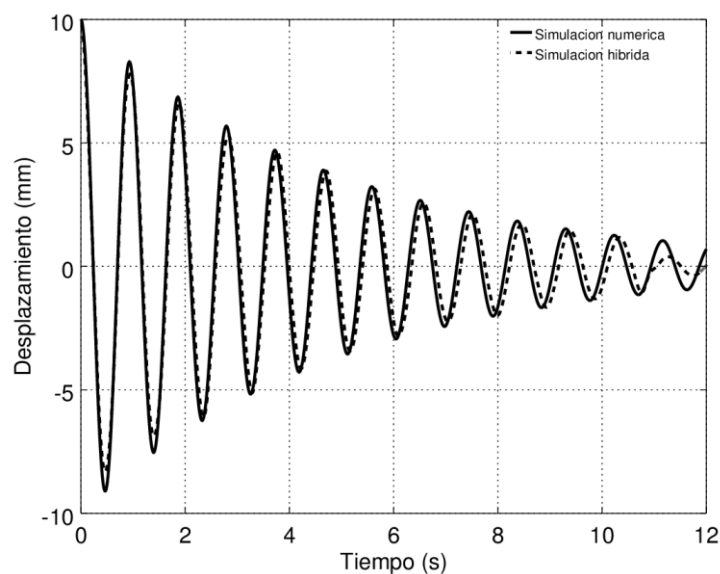


Figura 5-2. Desplazamiento en los modelos numérico e híbrido obtenido con las propiedades dinámicas identificadas previamente.

Se puede apreciar que el resultado es muy parecido, aunque el sistema híbrido, representado con línea discontinua tiene algunos picos, dado que esta sometido al ruido y además se dispone de menos puntos por unidad de tiempo para representar el comportamiento, lo cual hace que evidentemente no sea una curva perfecta, como si lo es el resultado numérico. Por un lado, se observa que ambas oscilaciones se corresponden con un movimiento amortiguado de parecidas características, lo cual es un buen resultado. Si bien es cierto que las diferencias se hacen más evidentes conforme transcurre el tiempo, y a partir de los 11 segundos se puede observar como la solución experimental, la cual ha sido realizada empleando las propiedades dinámicas de la Tabla 5-2 está desfasada respecto a la numérica como se observa en la Figura 5-2. Este desfase acumulativo entre el sistema híbrido y el numérico puede deberse al retraso en el incremento de tiempo introducido por el algoritmo de solución híbrida expuesto en la sección 2.4.3.

Por otra parte, se observa que cuando los desplazamientos son pequeños (menor a 2 mm) llegamos al límite de precisión, y a partir de este punto se produce una divergencia mayor en los resultados.

En las sucesivas figuras se muestra el comportamiento del resto de variables de nuestro sistema, como son la velocidad, aceleración, fuerza de interacción y multiplicador de Lagrange.

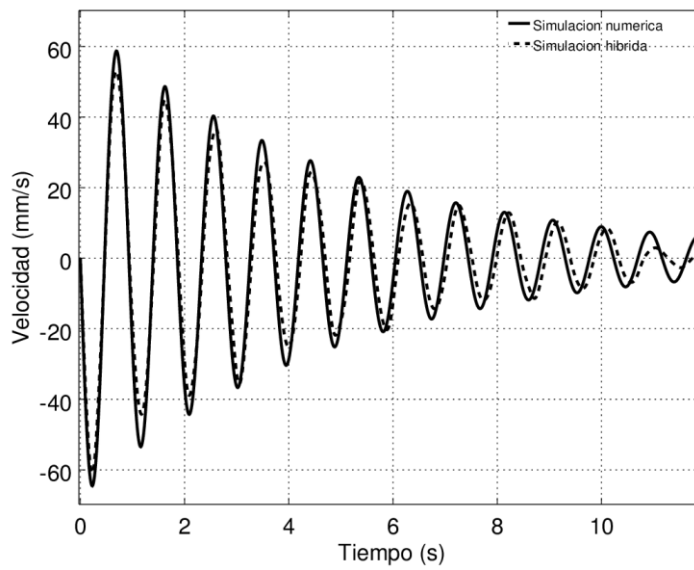


Figura 5-3. Velocidad en ambos modelos tras identificación de propiedades dinámicas del sistema experimental.

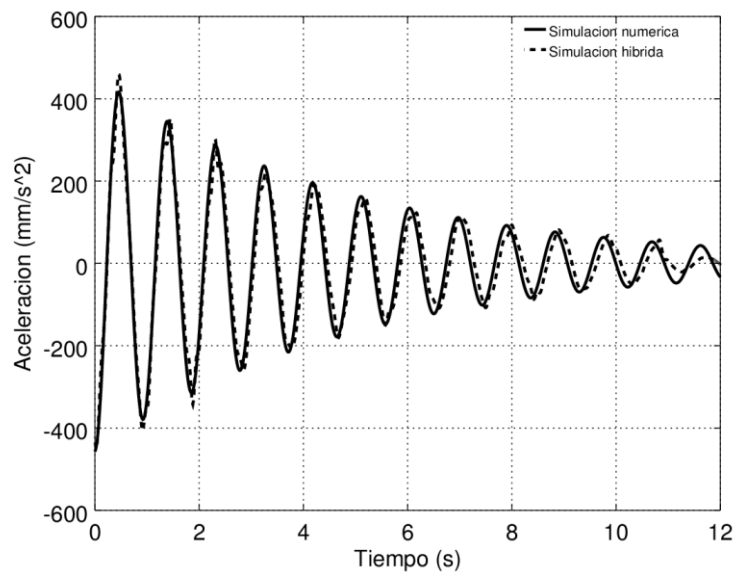


Figura 5-4. Aceleración en ambos modelos tras identificación de propiedades dinámicas del sistema experimental.

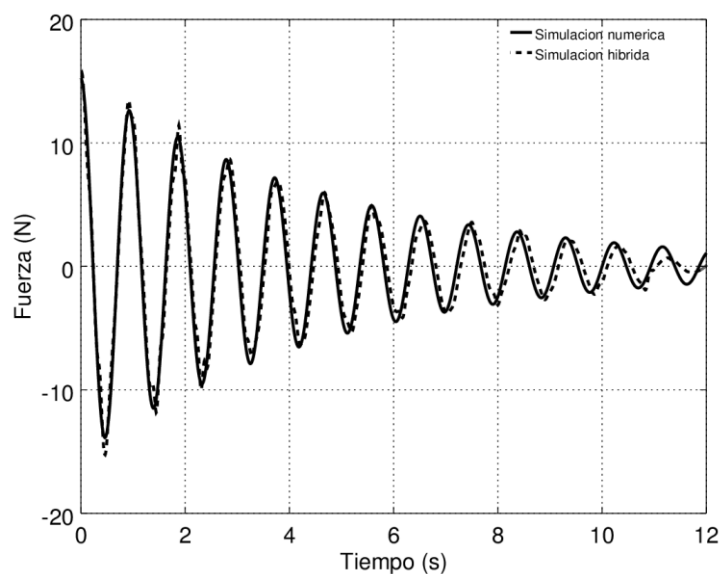


Figura 5-5. Multiplicador de Lagrange (modelo numérico) y fuerza de interacción (modelo experimental) en ambos modelos tras identificación de propiedades dinámicas del sistema experimental.

Vista la similitud en la anteriores figuras entre la simulación numérica y la híbrida, a partir de este punto se emplearán como propiedades dinámicas del sistema experimental las definidas en la Tabla 5-4, sin considerar necesario ningún tipo de modificación en sus valores.

5.4 Ejemplo de validación

Con el objetivo de validar las propiedades dinámicas del modelo experimental determinadas se realizará a continuación la siguiente validación. Manteniendo constantes las propiedades del sistema experimental se modificarán únicamente las propiedades de la parte numérica, para comprobar si dichas propiedades son aproximadamente constantes, obteniéndose de nuevo resultados parecidos.

Los parámetros de integración empleados se muestran en la Tabla 5-5, y serán los mismos que los empleados en el apartado anterior. Las propiedades dinámicas de ambos subsistemas se muestran en la Tabla 5-6, donde se aprecia que las del subsistema numérico son diferentes a las del apartado anterior, concretamente la masa se reduce a la mitad y el amortiguamiento se duplica, con el objetivo de evaluar la respuesta obtenida ante esta modificación.

$u_0(m)$	$v_0(m/s)$	$\Delta t (s)$	n_{steps}	$f_{ext}(N)$	β	γ
0.01	0	0.01	300	0.00	0.25	0.50

Tabla 5-5. Condiciones iniciales y parámetros de integración empleados para la realización del ejemplo de validación de las propiedades dinámicas.

<i>PROPIEDADES DINÁMICAS</i>	$M(kg)$	$C(N \cdot \frac{s}{m})$	$K(\frac{N}{m})$
<i>Parte Experimental</i>	0.356	5.43	1540
<i>Parte Numérica</i>	34/2	2·8.5	30

Tabla 5-6. Propiedades dinámicas del sistema numérico y experimental empleados en el problema de validación.

El resultado obtenido en ambos casos se muestra en las sucesivas figuras, en donde se indica con línea continua el resultado de la simulación numérica y con línea discontinua el resultado de la simulación híbrida.

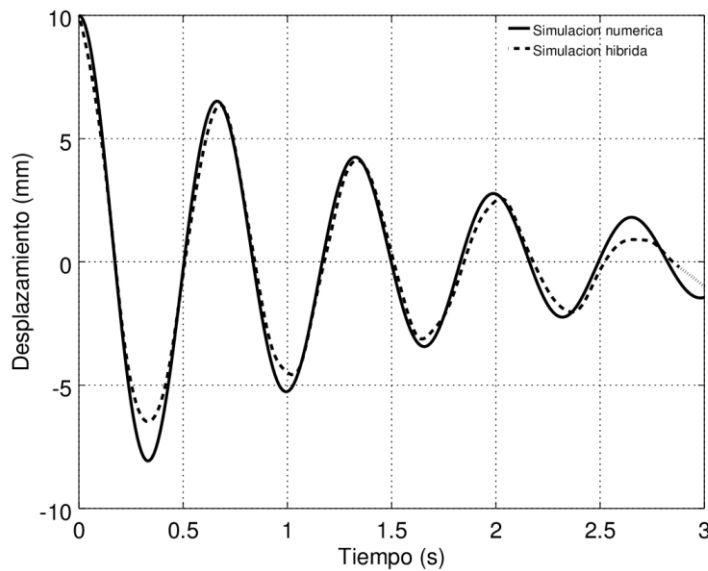


Figura 5-6. Solución del problema de validación. Comparación de los desplazamientos obtenidos mediante simulación numérica y simulación híbrida.

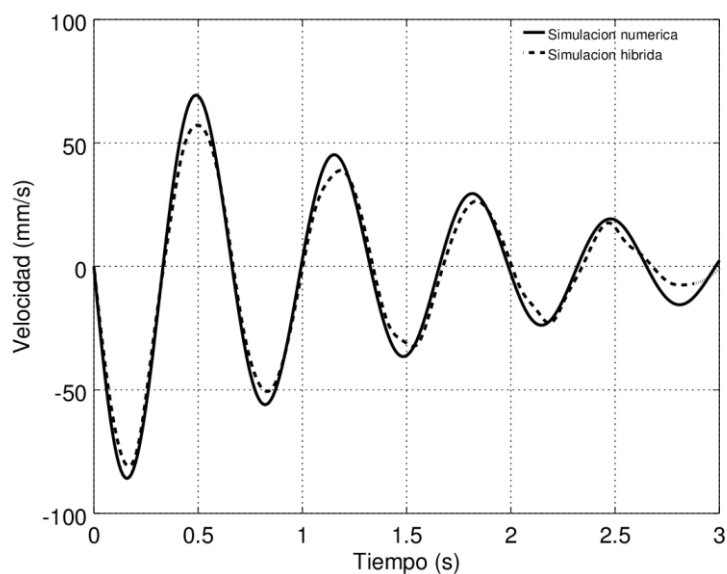


Figura 5-7. Velocidad en el problema de validación. Comparación de las velocidades obtenidas mediante simulación numérica y simulación híbrida.

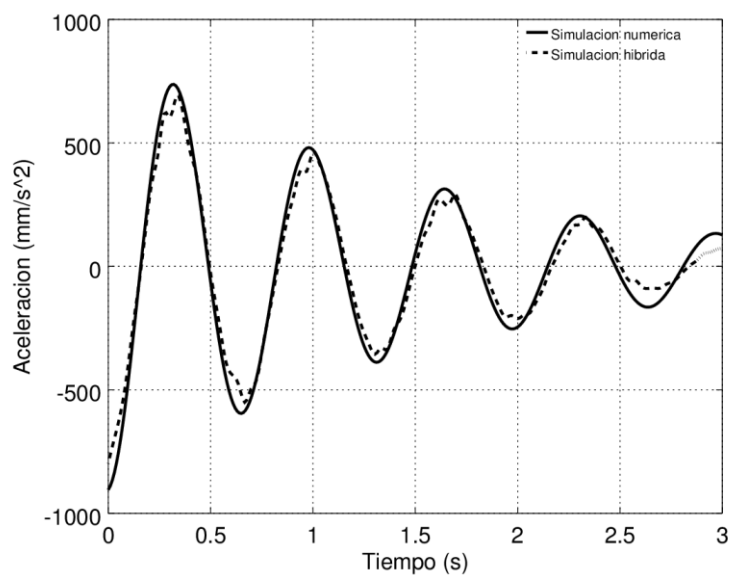


Figura 5-8. Aceleración en el problema de validación. Comparación de las aceleraciones obtenidas mediante simulación numérica y simulación híbrida.

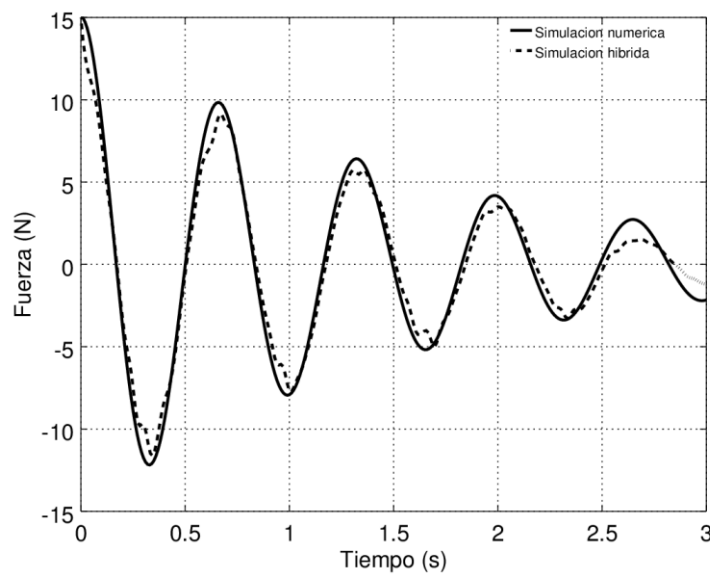


Figura 5-9. Multiplicador de Lagrange (simulación numérica) y fuerza de interacción (simulación híbrida) en ambos modelos en el problema de validación.

En las anteriores figuras se puede apreciar cómo, a pesar de haber modificado las propiedades dinámicas del subsistema numérico, la solución tanto de este como del subsistema experimental siguen coincidiendo, siempre teniendo en cuenta las posibles perturbaciones en los resultados sufridas al trabajar con un sistema físico, demostrándose por tanto la validez de las propiedades dinámicas identificadas en los apartados (5.2.1), (5.2.2) y (5.2.3).

6 RESULTADOS

6.1 Introducción

En este capítulo se realizará la validación del sistema completo funcionando con todos los elementos necesarios para poder realizar una simulación híbrida real. Lo que diferencia a este punto de los anteriores es la inclusión de una fuerza externa, que será aplicada sobre la parte numérica, simulando la fuerza que se aplicaría sobre un edificio o estructura en caso de una vibración provocada por un sismo, viento, o cualquier otro tipo de carga dinámica.

Aunque en estas simulaciones aplicaremos fuerzas armónicas, no habría ningún impedimento en aplicar una fuerza con cualquier otra forma de onda, incluso no periódica o aleatoria, pero, dado que la mayoría de las fuerzas que pueden causar el fallo suelen tener un comportamiento periódico o similar emplearemos en estos casos una forma de onda senoidal.

Como es sabido, cuando un sistema se somete a una fuerza externa senoidal decimos que tenemos un sistema en vibración forzada, y este finalmente alcanzará un régimen permanente de una determinada amplitud y frecuencia. La frecuencia será la misma que la de la fuerza externa que se le aplique, es por ello importante remarcar que, tal y como se comentó en el apartado 4.4, nuestro sistema puede oscilar como máximo a 3.5 Hz, de modo que la frecuencia de la fuerza externa que se le aplique deberá tener un valor inferior a este, si queremos que el comportamiento sea recogido satisfactoriamente.

La función que modelará la fuerza externa aplicada, así como el resto de los parámetros de simulación se recogen en la Tabla 6-1.

6.2 Simulación híbrida de un sistema de un grado de libertad en vibración forzada

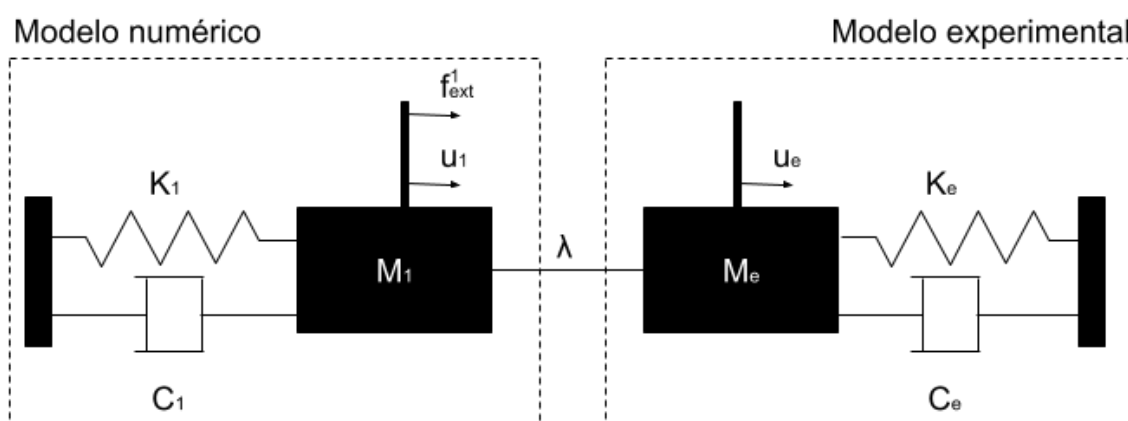


Figura 6-1. Representación esquemática del modelo simulado, diferenciado según la parte numérica y la parte experimental.

A continuación, se aplicará una fuerza sobre la parte numérica del sistema y se analizará el comportamiento ofrecido tanto por los resultados numéricos como por la simulación híbrida. Como se puede observar en la Figura 6-1, la parte numérica será denotada con el subíndice 1 mientras que la parte experimental será denotada con el subíndice e . La amplitud de vibración del sistema vendrá determinada en parte por el módulo de la fuerza externa aplicada.

Si esta fuerza es de valor demasiado reducido las oscilaciones podrían ser bajas, en el rango de 1 mm, por lo que, como ya se comentó, tendríamos dificultades para registrar correctamente la fuerza vincular. Es por eso por lo que se seleccionará una fuerza externa de módulo tal que la amplitud en régimen permanente sea aproximadamente 2.5 mm. Aparte de esto, se deberá también comprobar que la fuerza vincular no excede en ningún momento el valor de 16.67 N, ya que de ser así la simulación híbrida no podría realizarse, dado que nuestro actuador no es capaz de ejercer fuerzas mayores. Debido a todo lo anterior nuestra fuerza externa senoidal tendrá una frecuencia de 1.5 Hz y una amplitud de 3 N.

En este caso se ha decidido combinar la fuerza externa con un desplazamiento inicial de 6 mm, para obtener una respuesta combinada hasta llegar al régimen permanente, y aumentar la complejidad de la simulación. Las propiedades dinámicas que definirán el comportamiento del sistema se recogen en la Tabla 6-1.

<i>PROPIEDADES DINÁMICAS</i>	$M_1(kg)$	$C_1(N \cdot \frac{s}{m})$	$K_1(\frac{N}{m})$
<i>Parte Numérica</i>	34	8.5	30

Tabla 6-1. Propiedades dinámicas de la parte numérica empleadas en la simulación híbrida de sistema de un grado de libertad en vibración forzada.

El resultado numérico y el ofrecido por la simulación híbrida se muestra en las siguientes figuras.

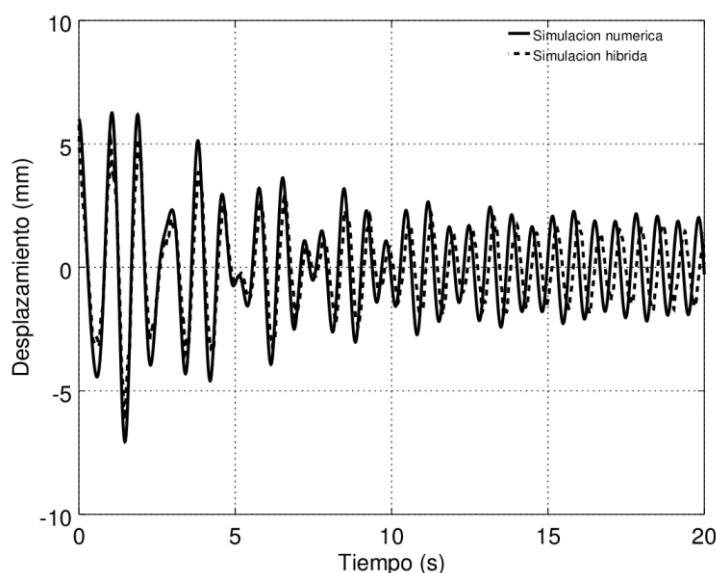


Figura 6-2. Solución de desplazamiento en la simulación numérica e híbrida de un sistema de un grado de libertad en vibración forzada.

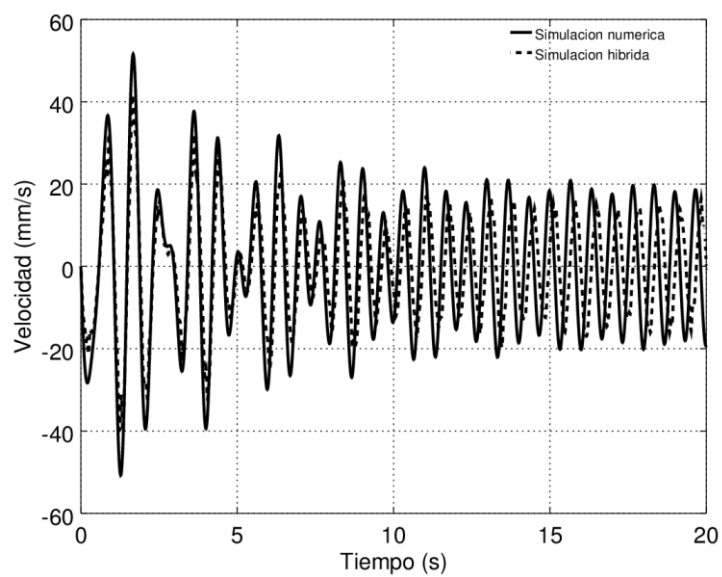


Figura 6-3. Velocidad en la simulación numérica e híbrida de un sistema de un grado de libertad en vibración forzada.

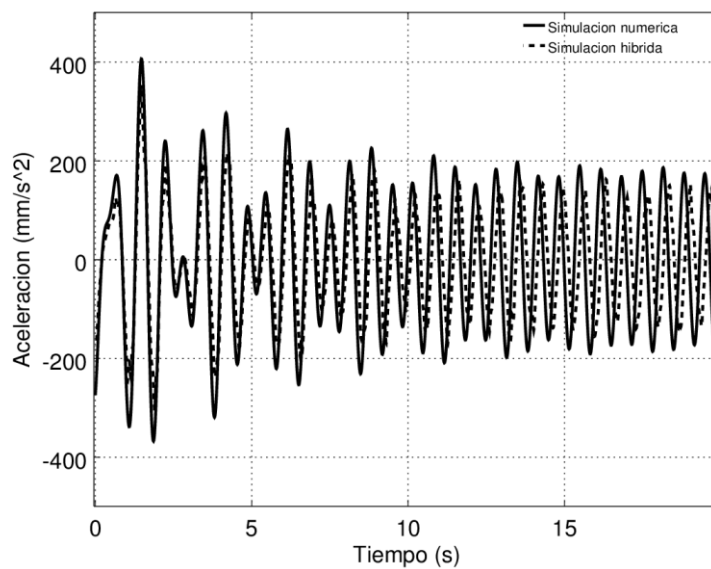


Figura 6-4. Aceleración en la simulación numérica e híbrida de un sistema de un grado de libertad en vibración forzada.

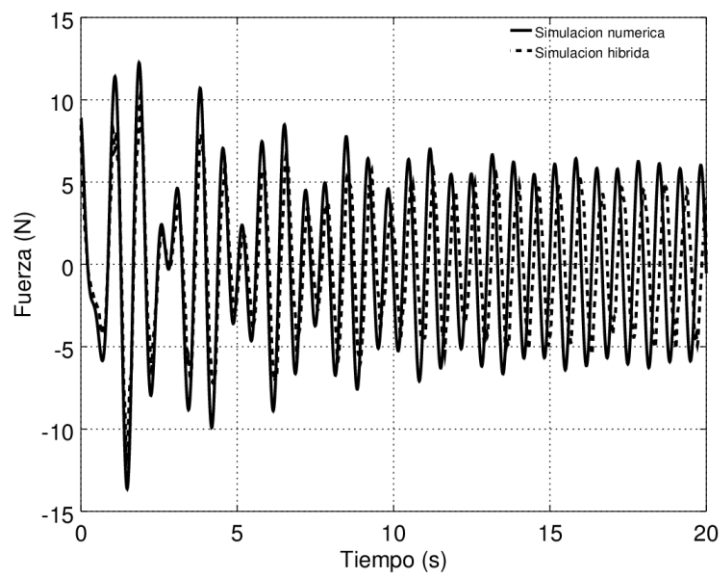


Figura 6-5. Multiplicador de Lagrange (simulación numérica) y fuerza de interacción (simulación híbrida) en ambos modelos en la simulación numérica e híbrida de un sistema de un grado de libertad en vibración forzada.

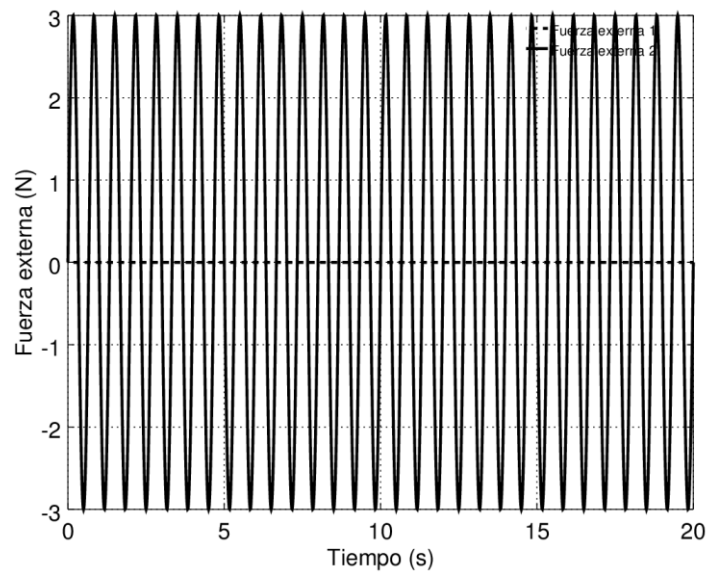


Figura 6-6. Fuerza externa senoidal aplicada sobre la parte numérica en la simulación numérica e híbrida de un sistema de un grado de libertad en vibración forzada.

6.3 Aplicación a un caso real

Una vez comprobado que nuestro sistema funciona correctamente con un único grado de libertad, pasamos a realizar una última simulación, para la cual se comparará el problema resuelto con una estructura real, enfocando por tanto este capítulo a una aplicación práctica de la simulación híbrida. Para ello, se aumentará la complejidad de la parte numérica, introduciendo un segundo grado de libertad, con el objetivo de obtener unos resultados con una forma de onda más compleja, fruto de la adición de un segundo modo de vibración proveniente del nuevo grado de libertad.

6.3.1 Simulación híbrida de problemas de n grados de libertad

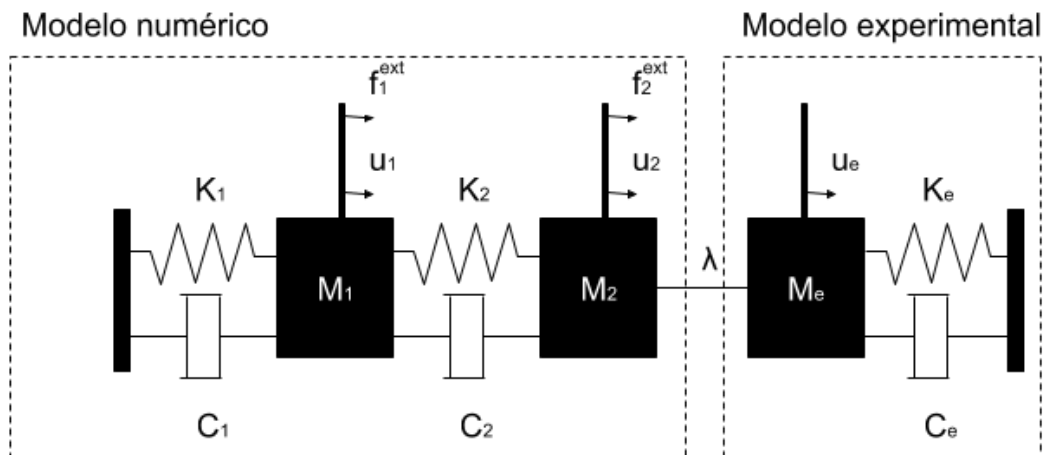


Figura 6-7. Representación esquemática del caso simulado de un problema amortiguado de 2 grados de libertad.

A diferencia de los casos anteriores, el sistema en estudio, representado esquemáticamente en la Figura 6-7, se plasmará sobre una estructura real, a modo de analogía, la cual será representada en la Figura 6-8, de cara a ejemplificar la posible aplicación de esta simulación híbrida sobre una estructura real, aunque el objeto de estudio seguirá siendo el sistema representado en la Figura 6-7. En la Figura 6-8 se puede observar un segmento de puente, el cual está constituido por dos secciones y un pilar. El objetivo sería en este caso determinar el comportamiento real del pilar cuando se somete a las secciones del puente a una aceleración causada por un sismo, representado como una aceleración de valor a sobre el terreno, como se aprecia en la parte inferior de la figura.

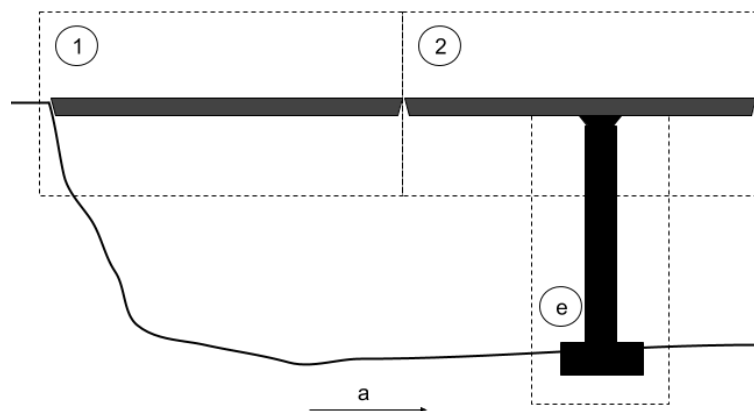


Figura 6-8. Ejemplo de caso práctico sobre el que se podría aplicar la simulación híbrida, en donde se aprecian las partes numéricas 1 y 2 así como la parte experimental denotada con la letra e .

6.3.2 Condiciones de simulación

Entre las cargas dinámicas más críticas que se pueden aplicar sobre una estructura en la naturaleza encontramos la oscilación del terreno, provocada normalmente por sismos, los cuales ponen en riesgo la integridad de la estructura, es por ello por lo que normalmente, en las simulaciones híbridas no se suele aplicar una fuerza directamente en puntos concretos de la estructura, sino que la deformación de la estructura se logra mediante la aplicación de una aceleración oscilante sobre la base de esta, simulando el desplazamiento del terreno. El efecto de la aceleración aplicado sobre la base no se puede introducir directamente en nuestro sistema, sino que esta aceleración tiene que ser convertida en una fuerza, la cual se podrá aplicar sobre cada una de las masas de nuestro sistema numérico dependiendo a su vez del valor de la masa del elemento sobre el que se aplique.

El modo de realizar esta transformación no es complejo, simplemente consiste en aplicar a cada masa una fuerza igual al valor de la aceleración a la que están siendo sometida la base multiplicada por la masa del elemento. En nuestro caso tendríamos por tanto una fuerza externa aplicada sobre la masa 1 y otra aplicada sobre la masa 2. Conviene destacar que al estar solidariamente unidas las masas 2 y e (perteneciente a la parte experimental) la masa que deberá multiplicar a la aceleración en el cálculo de la fuerza externa 2 será la masa resultante de la suma de las masas 2 y la e , como se indica a continuación:

$$\begin{cases} f_1^{ext} = M_1 \cdot a \\ f_2^{ext} = (M_2 + M_e) \cdot a \end{cases} \quad (6-1)$$

En cuanto a la selección de los propiedades de masa, amortiguamiento y rigidez para modelar numéricamente estas secciones del puente se podría llegar a pensar que los valores introducidos deberían ser los más parecidos posibles a los de una estructura real, de modo que estaríamos hablando del orden de toneladas de masa, sin embargo, conviene recordar que lo que se está analizando en esta simulación híbrida no es la estructura real, ni siquiera una parte de ella, sino lo que se está analizando en este caso podría asemejarse a una parte de esta estructura a escala reducida, una maqueta. Es por esto por lo que los valores introducidos en la parte numérica también deben ser escalados en la misma proporción que los de la parte real del sistema.

De forma resumida, esto implica que si el apoyo del puente en nuestra maqueta pesa 10000 veces menos que el apoyo de hormigón de la estructura, la masa de las secciones deben mantener también esta relación al ser introducidas en la parte numérica, y lo mismo ocurre con el amortiguamiento y la rigidez, de manera que se respete la escala en cada una de las partes de nuestro sistema, a efectos de obtener un resultado coherente, parecido de algún modo a lo que ocurre con los números adimensionales en las simulaciones aerodinámicas.

En la Tabla 6-2 se recogen los parámetros de integración empleados en la simulación y que no dependen de las propiedades dinámicas empleadas.

Δt (s)	n_{steps}	β	γ
0.01	500	0.25	0.50

Tabla 6-2. Parámetros de integración empleados para la realización de la simulación híbrida sobre un sistema de dos grados de libertad.

Evidentemente, las condiciones iniciales de desplazamiento, velocidad y aceleración en todas y cada una de las masas debe ser cero, ya que este es el estado normal de una estructura instantes antes de sufrir un sismo.

Los valores de rigidez y amortiguamiento de la parte numérica serán inferiores a los del pilar, ya que se presupone que la rigidez del pilar es más elevada. La masa de cada una de las secciones del puente será la misma que la del pilar.

<i>PROPIEDADES DINÁMICAS</i>	$M_i(kg)$	$C_i(N \cdot \frac{s}{m})$	$K_i(\frac{N}{m})$
<i>Númerica 1</i>	0.356	2.5	30
<i>Númerica 2</i>	0.356	2.5	30
<i>Experimental e</i>	0.356	5.43	1540

Tabla 6-3. Propiedades dinámicas de las partes numéricas y experimental empleada en la simulación híbrida de un problema de dos grados de libertad.

6.3.3 Simulación híbrida ante una aceleración armónica

A continuación, se evaluará el comportamiento del sistema de dos grados de libertad mediante simulación híbrida ante un sismo de duración indefinida, el cual será modelado como una aceleración senoidal en la base, que será convenientemente trasladada en forma de fuerza a cada una de las masas, tal y como se ha explicado anteriormente.

Dado que el sistema, una vez estabilizado, vibrará en régimen permanente a la misma frecuencia de la excitación aplicada, se impone como condición, según se explicó en el apartado 4.4 que la frecuencia de la excitación sea inferior a 3.5 Hz. Además, se deberá comprobar en el resultado numérico obtenido que la amplitud de la oscilación del subsistema numérico no sea superior a 10 mm, de acuerdo con el apartado 4.5. Es por ello por lo que la aceleración senoidal aplicada en la base tendrá una frecuencia de 1.5 Hz y una amplitud de $9m/s^2$.

$$a = 9sen(2\pi \cdot 1.5Hz \cdot t) [m/s^2] \quad (6-2)$$

Para poder evaluar la respuesta en régimen permanente se considerará que esta oscilación tiene una duración ilimitada, no obstante, y una vez simulado de esta forma se experimentará con una aceleración decreciente, en posteriores apartados.

En la Figura 6-9 observamos las fuerzas que se aplican sobre cada uno de los subsistemas como consecuencia de la oscilación provocada en el terreno, debidas a la aceleración experimentada. Se aprecia como la fuerza 2 (ejercida sobre el subsistema 2) es de mayor valor que la fuerza 1, al contar esta primera con dos masas asociadas, tanto la numérica como la experimental, que representarían una sección y el pilar del puente respectivamente.

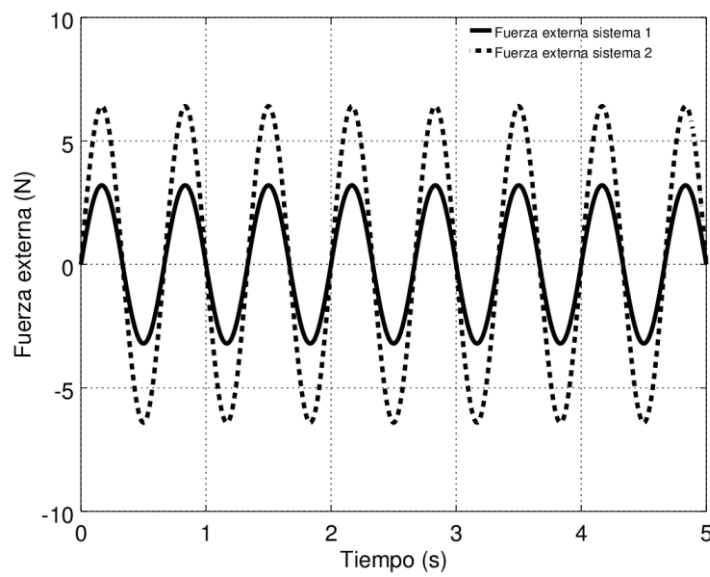


Figura 6-9. Fuerzas externas sufridas por los subsistemas como consecuencia de la aceleración del terreno.

En las siguientes figuras se muestra el resultado de la simulación. Al igual que se ha hecho en los casos anteriores se mostrará la simulación híbrida con línea discontinua y como referencia, el resultado numérico con línea continua.

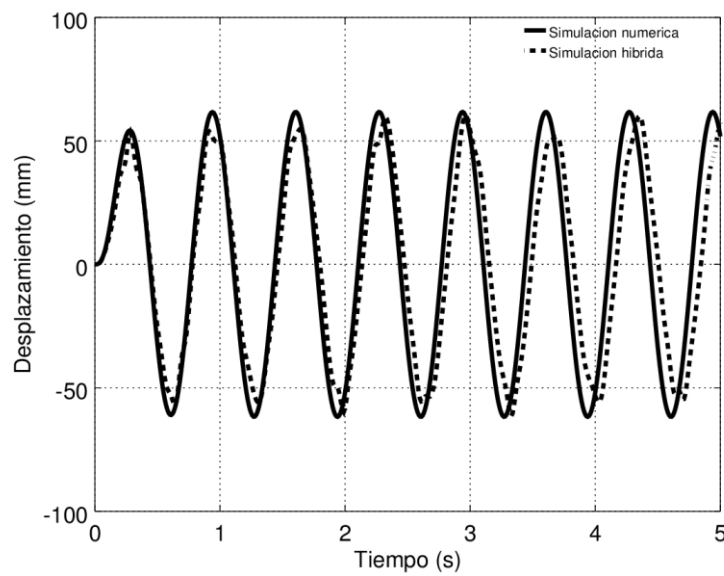


Figura 6-10. Resultado numérico e híbrido del desplazamiento del subsistema 1 en la simulación de una aceleración de duración ilimitada.

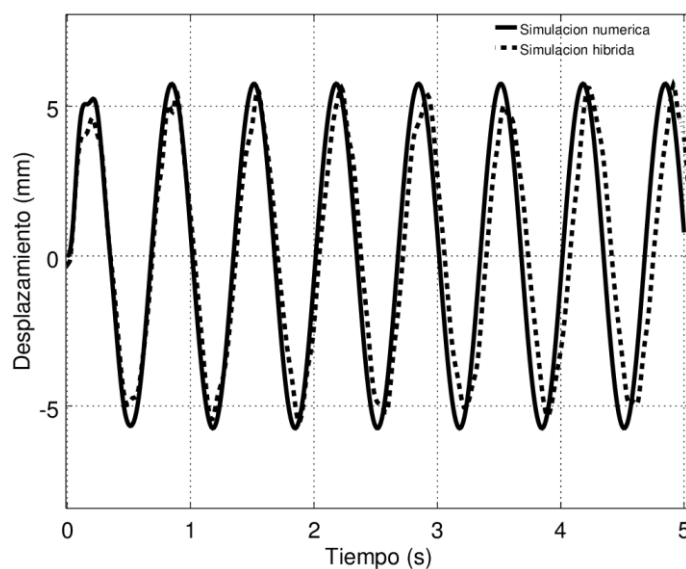


Figura 6-11. Resultado numérico e híbrido del desplazamiento del subsistema 2 en la simulación de una aceleración de duración ilimitada.

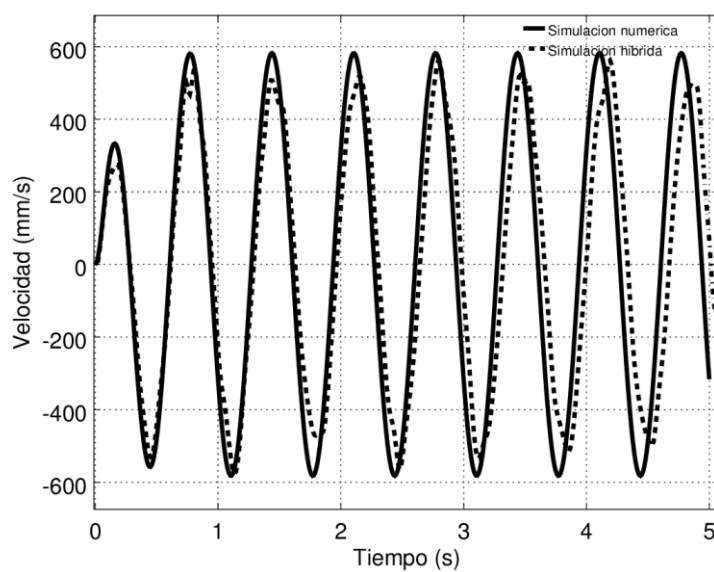


Figura 6-12. Resultado numérico e híbrido de la velocidad del subsistema 1 en la simulación de una aceleración de duración ilimitada.

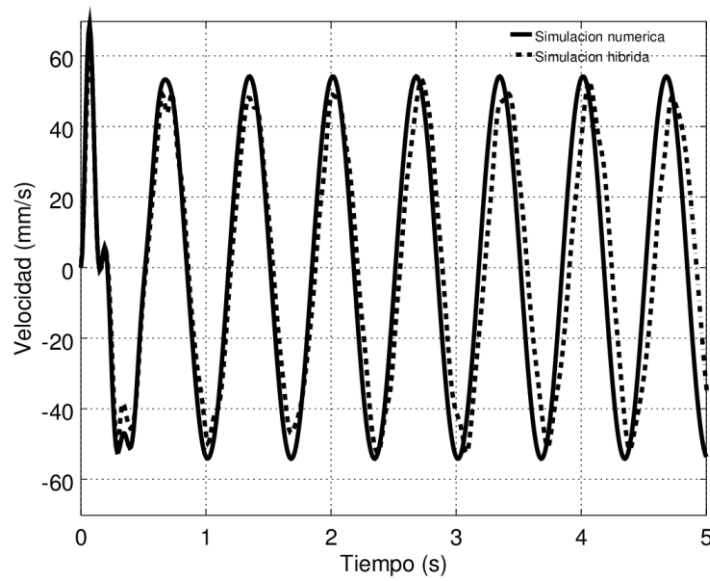


Figura 6-13. Resultado numérico e híbrido de la velocidad del subsistema 2 en la simulación de una aceleración de duración ilimitada.

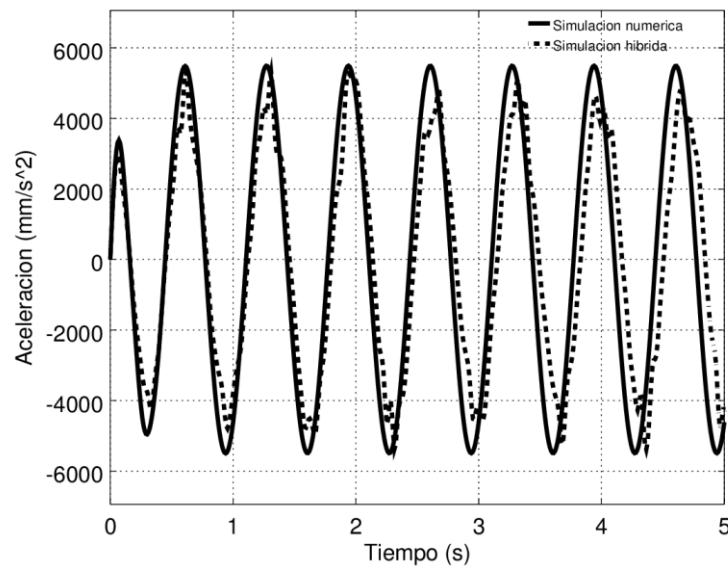


Figura 6-14. Resultado numérico e híbrido de la aceleración del subsistema 1 en la simulación de una aceleración de duración ilimitada.

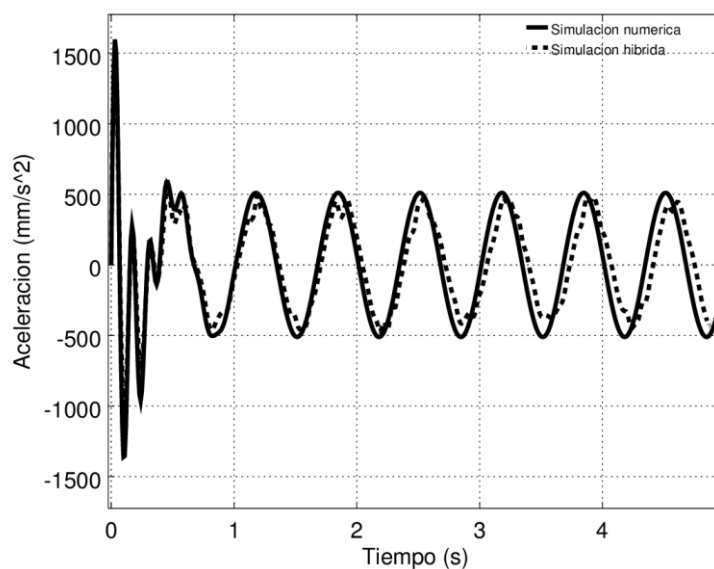


Figura 6-15. Resultado numérico e híbrido de la aceleración del subsistema 2 en la simulación de una aceleración de duración ilimitada.

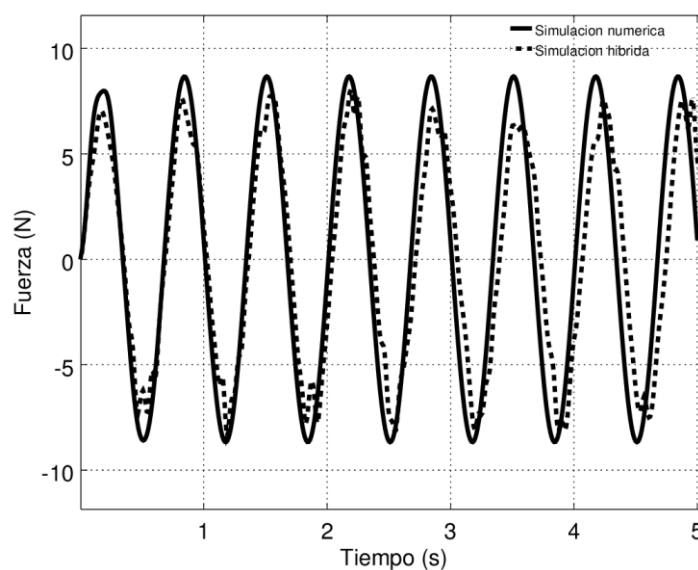


Figura 6-16. Multiplicador de Lagrange (simulación numérica) y fuerza de interacción (simulación híbrida) en ambos modelos en la simulación de una aceleración de duración ilimitada.

Como se observa en las anteriores figuras los resultados numéricos e híbridos son muy similares, y la única variable en la que hay una mayor diferencia es precisamente en la fuerza vinculante, la cual es tomada por nuestro sensor, de ahí que sea acompañada por cierto rizado, debido principalmente al ruido eléctrico.

Dando por válidos los resultados podemos observar como el sistema tiende a alcanzar el régimen permanente relativamente rápido, provocado en parte por la elevada rigidez del pilar.

Conviene también señalar como, las propiedades dinámicas de nuestro sistema, como son las masas, factores de amortiguamiento y rigideces de los resortes no se han escogido de forma aleatoria, sino que han sido seleccionados cuidadosamente para que cuando se realice la simulación híbrida el comportamiento del sistema este dentro de lo que puede ser simulado por nuestro actuador, y no exceda las limitaciones de este.

Básicamente lo anterior se resume en que, tal y como se explicó en los apartados 4.4, 4.5 y 4.6 :

- La frecuencia de oscilación sea inferior a 3.5 Hz, lo cual se cumple, dada que la frecuencia de la excitación es inferior a este límite, y en régimen permanente oscilará a esta frecuencia.
- La amplitud de oscilación máxima de la masa 2 sea inferior a 10 mm, el cual es el desplazamiento máximo que puede ofrecer nuestro actuador, lo cual también es verificado, como se observa en la Figura 6-11.
- La fuerza vincular ejercida entre la parte numérica y la parte real, aplicada por el actuador sea inferior a 16.67 N, como efectivamente se aprecia en la Figura 6-16.

Comparando los resultados ofrecidos por ambas secciones del puente, modeladas por la masa 1 y la 2 vemos como la segunda tiene un comportamiento más brusco, siendo mayor por tanto la amplitud máxima de su desplazamiento, su velocidad y aceleración. Esto puede ser causado por la falta de rigidez de los resortes que la anclan, a diferencia de la masa 2 que esta solidariamente unida al pilar, el cual posee elevada rigidez.

6.3.4 Simulación híbrida ante una aceleración decreciente

En un intento por acercar aún más nuestra excitación a la sufrida realmente en un sismo, se mostrará a continuación el comportamiento del sistema ante una aceleración senoidal en el terreno con una atenuación exponencial, al igual que ocurre en un sistema amortiguado. Esta aceleración tendrá una frecuencia de 1.5 Hz y en este caso se incrementará el valor de la aceleración hasta $2g$, siendo g el valor de la aceleración de la gravedad (9.81 m/s^2), además, como se ha comentado, esta onda irá multiplicada por una función exponencial decreciente (de exponente negativo) la cual tratará de simular la progresiva reducción de la aceleración sísmica. Todo lo anterior se modela según la siguiente expresión.

$$a = 2g \cdot \text{sen}(2\pi \cdot 1.5\text{Hz} \cdot t) \cdot e^{-0.5t} [\text{m/s}^2] \quad (6-3)$$

Los resultados de esta simulación deberían ser similares a los del caso anterior en cuanto al comportamiento de los subsistemas. Además, dado que todas las propiedades dinámicas son las mismas que en el caso anterior en este caso tampoco debería haber problema en cuanto a las limitaciones de frecuencia, amplitud y fuerza máxima que deba ser ejercida por nuestro actuador.

Se muestra en las siguientes figuras el resultado de esta última simulación, indicándose en la primera figura el comportamiento de la fuerza exponencialmente decreciente aplicada sobre cada subsistema.

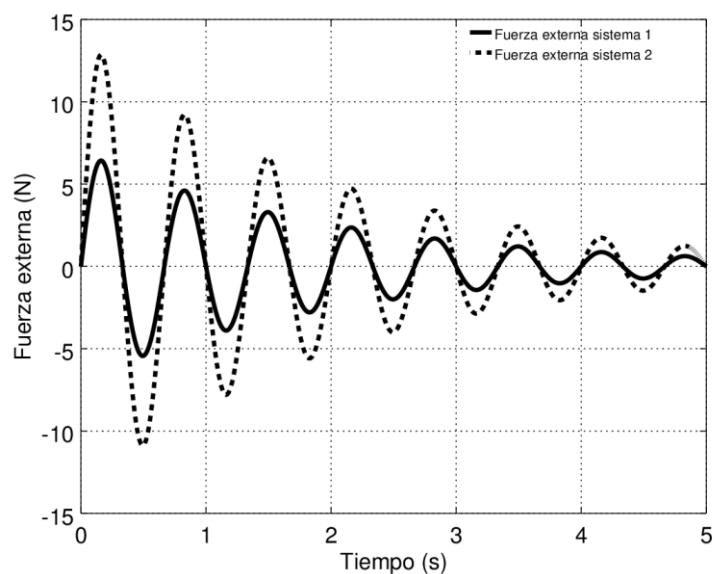


Figura 6-17. Fuerza externa exponencialmente decreciente aplicada sobre los subsistemas 1 y 2 como consecuencia del movimiento del terreno en el caso de simulación híbrida con aceleración decreciente.

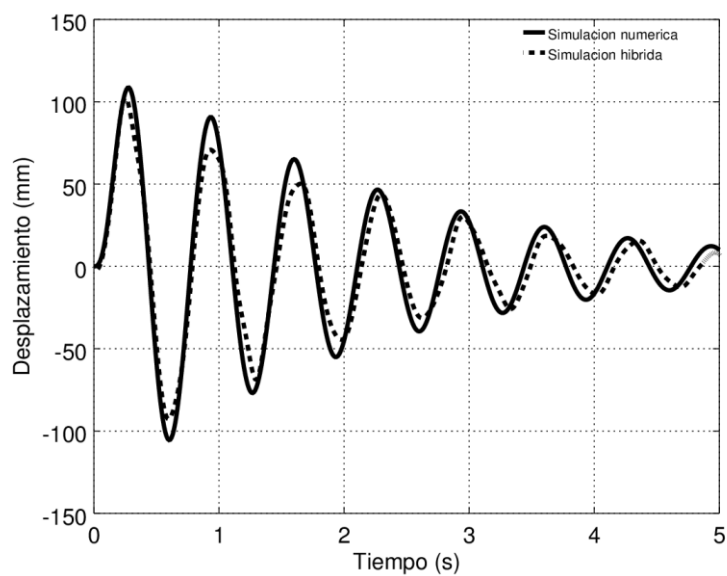


Figura 6-18. Solución del desplazamiento para el subsistema 1 en el caso de simulación híbrida con aceleración decreciente.

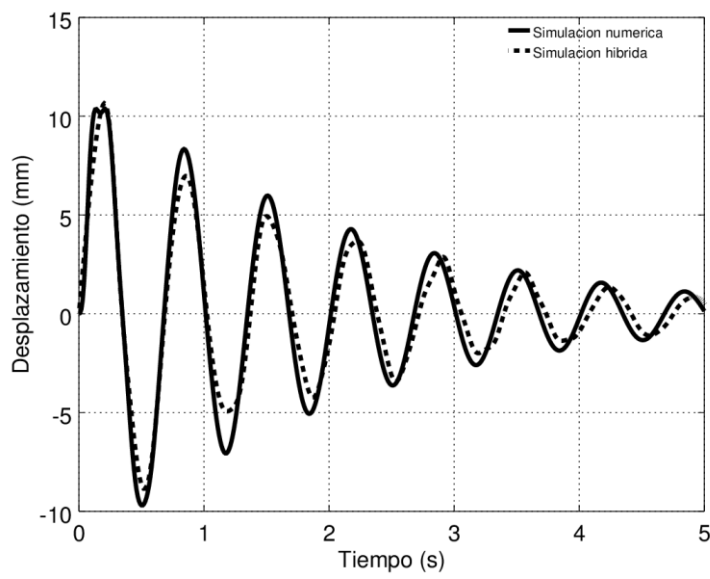


Figura 6-19. Solución del desplazamiento para el subsistema 2 en el caso de simulación híbrida con aceleración decreciente.

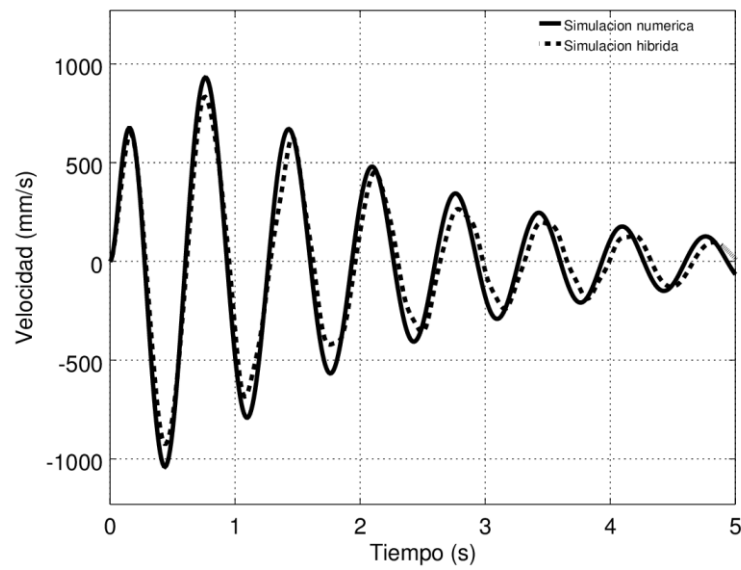


Figura 6-20. Velocidad del subsistema 1 en el caso de simulación híbrida con aceleración decreciente.

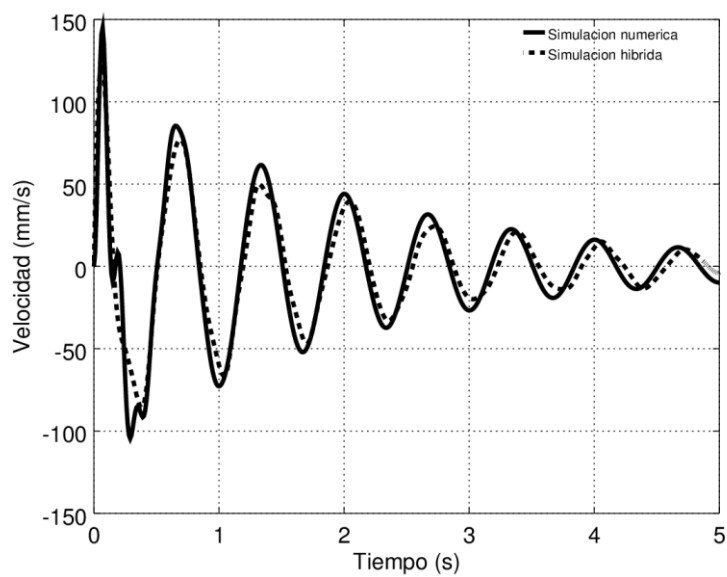


Figura 6-21. Velocidad del subsistema 2 en el caso de simulación híbrida con aceleración decreciente.

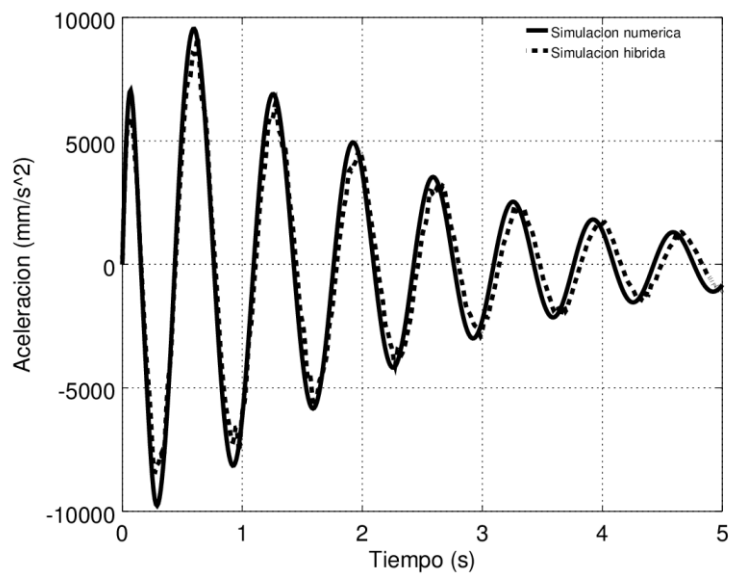


Figura 6-22. Aceleración del subsistema 1 en el caso de simulación híbrida con aceleración decreciente.

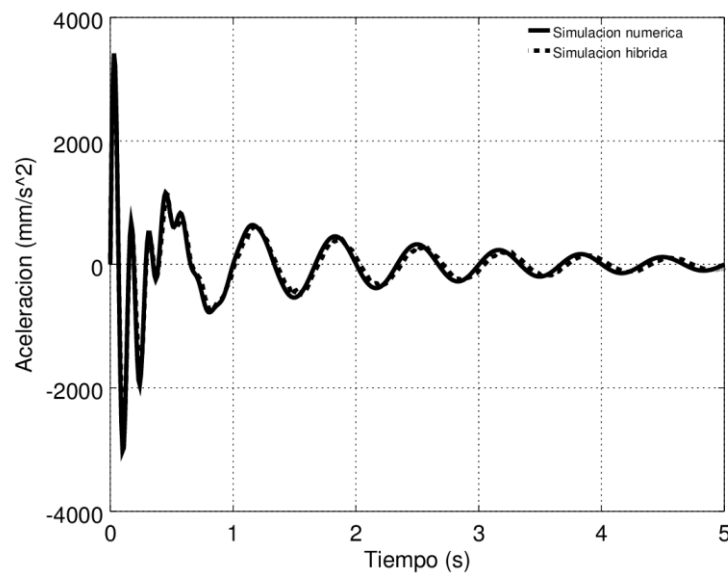


Figura 6-23. Aceleración del subsistema 2 en el caso de simulación híbrida con aceleración decreciente.

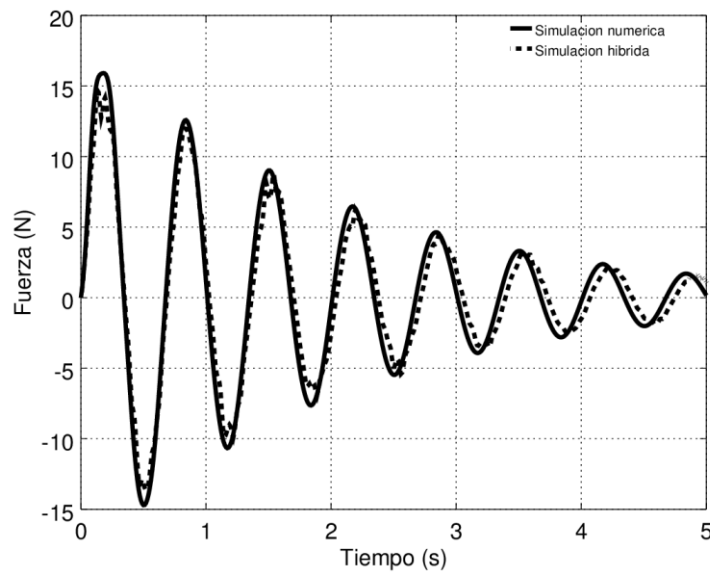


Figura 6-24. Multiplicador de Lagrange (solución numérica) y fuerza de interacción entre sistema numérico y experimental (solución híbrida) para el caso de simulación híbrida con aceleración decreciente.

Como se puede comprobar en las figuras anteriores los resultados experimentales han sido los esperados, conclusión que se puede extraer de la comparación entre la simulación híbrida y la numérica. Se observa cierto rizado en la medición de la fuerza de interacción fruto del ruido, entre otros factores físicos, el cual se extiende a la aceleración, pero sin que esto distorsione los resultados de forma considerable.

Se observa también como el subsistema 2 sufre una elevada aceleración transitoria, fruto de la presencia de dos masas interactuando entre sí, el cual sería sin duda el momento más crítico de toda la simulación, y en el que se podrían producir los mayores daños estructurales, sufridos en este caso por nuestro puente.

Aunque lo recomendable en este caso hubiese sido simular durante un lapso más elevado, para poder captar así el comportamiento del sistema hasta su estabilización, esto implicaría hacer trabajar al sistema con desplazamientos muy reducidos, lo cual, como ya se comentó en capítulos anteriores hace que la medición de la fuerza tenga demasiado error como para dar por válidos los resultados, por lo que se ha decidido simular solo durante un rango tal que el sistema funcione correctamente.

7 CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS

Una vez analizados todos los aspectos de nuestro trabajo, que abarcan desde la descripción teórica de la simulación híbrida, pasando por el montaje y desarrollo de un sistema de simulación experimental hasta finalizar en la validación y análisis de los resultados obtenidos, nos disponemos a exponer las conclusiones obtenidas, así como posibles elementos a mejorar del trabajo, de cara a seguir profundizando en esta materia.

7.1 Conclusiones

7.1.1 Algoritmos de integración para simulación híbrida

De todos los algoritmos de integración desarrollados para la simulación híbrida hemos empleado el método de *Newmark*. Después de habernos familiarizado con este método de integración podemos destacar como ventajas la relativa simplicidad en su programación, ya que existen métodos más complejos que requieren de iteraciones internas para obtener el siguiente valor.

Un aspecto que mejorar sería, sin embargo, el tiempo de procesamiento de cada iteración, ya que, si bien es cierto que no es un algoritmo ineficiente el tiempo de cálculo limita un posible incremento de la frecuencia de simulación (aunque este tiempo también dependerá evidentemente del equipo del que se disponga) y eso puede provocar la imposibilidad de simular estructuras a elevadas frecuencias.

7.1.2 Estudio de modelo no lineal

Debido al claro objetivo didáctico y enfocado al desarrollo y evaluación de los resultados obtenidos para este trabajo se optó por emplear como elemento experimental sobre el que ensayar un elemento con un comportamiento elástico lineal, ya que de este modo se podría obtener una expresión analítica que modelase de forma muy aproximada su comportamiento. Aunque en un ámbito académico esto tiene sentido, cuando se desea aplicar estos procedimientos a simulaciones de estructuras reales, con interés comercial, los elementos con un comportamiento altamente no lineal son sin duda los más interesantes, ya que el difícil modelado de su comportamiento puede ser evitado mediante el uso de este tipo de simulación, la simulación híbrida, que es precisamente en esto en donde destaca.

7.1.3 Incremento de la frecuencia máxima de simulación

Aunque tanto el software como el hardware empleado para este proyecto nos han permitido simular unas frecuencias de oscilación presentes en el rango típico de vibraciones sísmicas, también es cierto que la frecuencia que puede simular nuestro montaje no es demasiado elevada, y esto haría que, en caso de intentar simular un sismo real, gran parte del espectro de frecuencia quedase fuera de la simulación.

La posibilidad de incrementar esta frecuencia pasaría necesariamente por aumentar el número de puntos recogidos por unidad de tiempo, para lo cual se podrían implementar las siguientes mejoras:

- Optimizar el algoritmo empleado para el cálculo numérico, de cara a hacerlo más eficiente computacionalmente, y por tanto más rápido.
- Optimizar también el algoritmo empleado para sistema de control, de cara a reducir al mínimo los tiempos de espera y llegar a un equilibrio óptimo entre tiempo y rendimiento.

- Selección de un equipo de mayor potencia (procesador más rápido), de cara a ejecutar los cálculos de la parte numérica en menor tiempo.
- Seleccionar un actuador con una velocidad de desplazamiento mayor y baja inercia, lo cual no sería fácil ya que el dispositivo usado logra un buen desempeño en este sentido.
- Sustituir el método indirecto de medición de intensidad por uno directo, que nos permita trabajar a mayor frecuencia sin efectos indeseados.

Con todo esto nos acercáramos a un montaje con mejores características, que nos permitiese no solo comprender el funcionamiento y conceptos de la simulación híbrida sino poder emplear lo construido para realizar alguna simulación de cara a la validación de resultados de alguna estructura real, pendiente de construir, con fines comerciales.

7.1.4 Método de medición de la fuerza

Como ya se comentó al inicio de este texto, el método de medición de fuerza empleado en este montaje es un método indirecto de medición, mediante el cual, se puede conocer la fuerza ejercida obteniendo el valor de la intensidad, empleando un sensor destinado para ello, y conociendo la relación entre la intensidad que circula por el servo y el par aplicado por este.

Aunque este método funciona correctamente, y es válido desde el punto de vista físico, ya que, según las leyes del electromagnetismo la fuerza ejercida por un conductor sobre el que circula una intensidad depende linealmente de la intensidad que circule por él, también es cierto que este sistema limita en gran medida tanto la frecuencia máxima que somos capaces de simular como la precisión de los datos.

El principal motivo por el que esto ocurre es debido a que, dentro del consumo eléctrico del servo podemos diferenciar dos partes, por un lado, tenemos un consumo procedente del movimiento del servo, aunque este no esté ejerciendo fuerza alguna (en vacío), por otro lado, tenemos un segundo consumo que es el producido por el momento de fuerzas que debe ejercer el servo en estático, es decir, mientras no se mueve, para evitar el cambio de posición. Cuando nosotros queremos medir la fuerza que está ejerciendo el servo en un instante de tiempo dado, con este método, tenemos que asegurarnos de que el servo, durante ese instante, está completamente detenido, ya que, si no, aparte de medir la fuerza que está ejerciendo el servo sobre la estructura estaríamos añadiendo también la fuerza para mover los mecanismos internos de este, lo cual sería incorrecto.

Lo anterior conlleva a que en cada medición se introduzca un pequeño retardo que haga que el sistema no funcione todo lo rápido que pudiese. Esto se podría corregir con la sustitución del dispositivo de medición de carga por uno de mayor precisión y específicamente diseñado para tal fin, como una célula de carga, como la mostrada en la Figura 7-1, la cual, además de la adición de un “Puente de Wheatstone” para la medición de los valores de este sensor, llevaría inevitablemente a la sustitución del actuador, ya que para que la célula funcionase correctamente las fuerzas ejercidas tendrían que ser de mayor magnitud. Estos cambios encarecerían sin duda el sistema, pero aportarían una notable mejora en nuestro montaje.

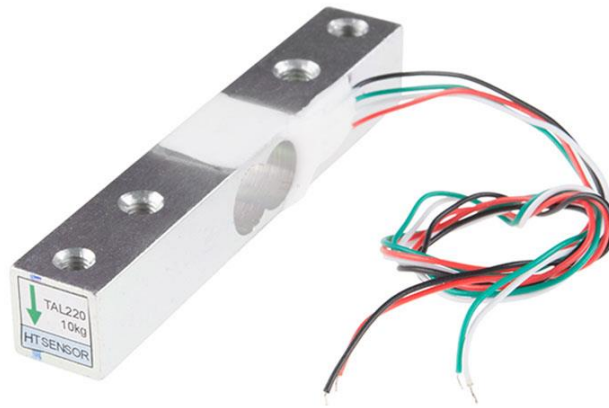


Figura 7-1. Célula de carga para fuerzas reducidas, empleando como tecnología de medición las galgas extensiométricas.

7.2 Desarrollos futuros

Por último, y una vez adquirida una visión global del trabajo se sugiere, de cara a futuros trabajos relacionados con esta materia, la realización de una maqueta real de una estructura, a escala reducida, para la comparación de resultados entre los arrojados por la simulación híbrida y otro método numérico, por ejemplo, simulación dinámica con elementos finitos.

De este modo se podría comparar el grado de coincidencia entre los resultados cuando trabajamos con sistemas más complejos, de múltiples grados de libertad. La experimentación con este sistema posiblemente también nos diese la oportunidad de experimentar con sistemas no lineales, que es donde la simulación híbrida de verdad muestra todo su potencial. Evidentemente, para la realización de este nuevo trabajo no partiríamos de cero, si no que tendríamos todo lo desarrollado en este, tanto desde el punto de vista teórico como práctico, pudiéndose emplear todos los dispositivos y algoritmos generados para este trabajo.

REFERENCIAS

- [1] CARL, J. *Improved Dynamic Testing by Impedance Control*. Boulder, Colorado: University of Colorado, 2008.
- [2] C.L. NACHTIGAL, *Instrumentation and control: fundamentals and applications*. Wiley series in mechanical engineering practice. 1990, New York: Wiley.
- [3] C.K. SHIELD, C.W. FRENCH, AND J. TIMM, *Development and implementation of the effective force testing method for seismic simulation of large-scale structures*. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 2001. 359(1786): p. 1911-1929.
- [4] ASHASI-SORKHABI, A. *Experimental investigations of tuned liquid damper-structure interactions in resonance considering multiple parameters* En: Journal of Sound and Vibration, Volume 388, 3 Febrero 2017.
- [5] https://www.maplesoft.com/content/EngineeringFundamentals/7/MapleDocument_7/Harmonic%20Excitation%20Part%201.pdf
- [6] TIMOTHY BUI. *Explicit and Implicit Methods In Solving Differential Equations*. University of Connecticut.
- [7] NICHOLAS J. HIGHAM. *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*. Philadelphia: Society of Industrial and Applied Mathematics. (1996). ISBN 0-89871-355-2.
- [8] NEWMARK, N. M. *A method of computation for structural dynamics*. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 85 (EM3) 67-94. (1959)
- [9] *American Society of Civil Engineers. Nathan M. Newmark Medal*." Archived from the original on 2007-09-30. Retrieved 2008-01-21.